Готовимся к экзамену

Е. И. Федорако

Практикум по МАТЕМАТИКЕ для подготовки к ЦЕНТРАЛИЗОВАННОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ



«Белый Ветер»®

Раздел I

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

1. Рациональные числа и вычисления. Пропорция, проценты. Иррациональные числа

1.1. Натуральные числа. Целые числа

Множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Множество целых чисел $\{... -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$.

Если натуральное число A делится нацело (без остатка) на B, то говорят, что A **кратно** B, а число B является **делителем** числа A. Натуральное число называется **четным**, если оно делится нацело на 2. В противном случае — число **нечетное**.

Натуральное число n, не равное 1, называется **простым**, если оно имеет только два делителя: 1 и само число n. Примеры простых чисел: 5, 7, 11, 23. Натуральное число n называется **составным**, если оно имеет более двух делителей. Примеры: 6, 8, 15. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Общим делителем чисел m и n называется число, на которое делятся оба числа m и n. **Наибольший общий делитель** чисел m и n обозначается НОД(m, n). Для отыскания НОД(m, n) необходимо разложить каждое из чисел m и n на простые множители и вычислить произведение общих простых множителей, взятых с наименьшим (из имеющихся) показателем степени.

Общим кратным чисел m и n называется число, которое делится на каждое из чисел m и n. **Наименьшее общее кратное** чисел m и n обозначается НОК(m, n). Для отыскания НОК(m, n) необходимо разложить каждое из чисел m и n на простые множители и вычислить произведение всех получившихся простых множителей, взятых с наибольшим (из имеющихся) показателем.

Пример. Найти НОД(252; 270) и НОК(252; 270). Разложение чисел на простые множители: $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$. Тогда НОД(252; 270) $= 2 \cdot 3^2 = 18$. НОК(252; 270) $= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780$.

1.2. Арифметические вычисления. Обыкновенные дроби, десятичные дроби. Иррациональные числа

Дробь вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральное числа, — **обыкновенная дробь**, m — ее **числитель**, а n — **знаменатель**. Дробь **правильная**, если $m < n$, и неправильная при $m \geq n$.

Дробь вида $\frac{m}{10^n}$, где m и n — натуральные числа, называется **десятичной**. Любую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной, например: $0{,}236 = \frac{236}{1000}$.

Если при вычислении значения выражения в нем присутствуют и обыкновенные и десятичные дроби, то их следует представить в одинаковом виде.

Десятичная дробь, у которой начиная с некоторого знака после запятой повторяется цифра или группа цифр, называется **бесконечной периодической**. Повторяющуюся цифру или группу цифр называют **периодом** дроби и записывают в скобках, например: $0{,}151515... = 0{,}(15)$. Любую бесконечную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной.

А) Если период такой дроби начинается сразу после запятой, то для представления ее в виде обыкновенной необходимо в числителе записать период дроби, а в знаменателе число, записанное таким количеством девяток, сколько цифр в периоде.

Например: $0{,}(3) = \frac{3}{9} = 1{,}(26) = 1\frac{26}{99}$

Б) Если между запятой и периодом дроби есть еще цифры, то числитель дроби равен разности между самим числом, включая один период, и числом, стоящим до периода, а знаменатель — число, записанное таким количеством девяток, сколько цифр в периоде, и таким количеством нулей, сколько цифр после запятой до периода.

Например: $0{,}2(13) = \frac{213 - 2}{990} = \frac{211}{990}$; $4{,}35(7) = \frac{4357 - 435}{900} = \frac{3922}{900} = 4\frac{322}{900}$ или

$4{,}35(7) = 4\frac{357 - 35}{900} = 4\frac{322}{900}$.

Бесконечная десятичная непериодическая дробь называется **иррациональным** числом. Примерами таких чисел являются: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; π; e и др.

Множество всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством **действительных** чисел.

1.3. Пропорция. Проценты

Пропорцией называется верное равенство вида: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Основное свойство пропорции: $a \cdot d = b \cdot c$.

Процентом (1 %) числа называется его сотая часть. Таким образом, само число составляет 100 %. Для решения задачи на проценты необходимо перевести процент в дробь: $p_1 = \frac{p\ \%}{100}$ и придерживаться следующих правил:

А) Для нахождения p % от числа a необходимо умножить число a на p_1: $a \cdot p_1$.

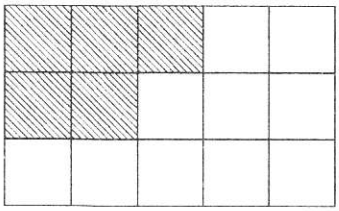
Б) Чтобы найти число по его проценту (если известно, что p % от числа есть b), необходимо b разделить на p_1: $\frac{b}{p_1}$.

В) Чтобы найти, сколько процентов составляет число b от числа a, необходимо b разделить на a и умножить на 100 %: $\frac{b}{a} \cdot 100\ \%$

Полезно запомнить наиболее простые соотношения:

$$50\ \% = \frac{1}{2};\ 25\ \% = \frac{1}{4};\ 20\ \% = \frac{1}{5}.$$

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Из чисел: 4; 5; 7; 11; 19; 21; 74; 87 выберите простые. В ответе укажите их сумму.	1) 16; 2) 42; 3) 129; 4) 63; 5) 27.
2.	Из чисел 5; 13; 23; 119; 127 составным является число:	1) 5; 2) 13; 3) 23; 4) 119; 5) 127.
3.	Найти сумму наибольшего простого двузначного и наибольшего простого однозначного чисел.	1) 90; 2) 108; 3) 110; 4) 100; 5) 104.
4.	Из утверждений выбрать верные: а) 0 — наименьшее натуральное число; б) наибольшего натурального числа не существует; в) числа 12 и 15 являются взаимно простыми; г) 17 — двузначное нечетное число; д) сумма чисел 12 и 15 кратна 9.	1) а, б, г, д; 2) б, г, д; 3) а, в, г; 4) б, в, г; 5) б, в, г, д.
5.	Найти числа, кратные 4: 1; 2; 3; 5; 8; 18; 24; 30. В ответе указать их сумму.	1) 3; 2) 50; 3) 80; 4) 32; 5) 6.
6.	Найдите количество делителей числа 42.	1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9; 5) 10.
7.	Разложите число 102 на простые множители. В ответе укажите их сумму.	1) 22; 2) 6; 3) 102; 4) 23; 5) 51.
8.	Найдите наименьшее общее кратное чисел 54 и 48.	1) 108; 2) 162; 3) 144; 4) 432; 5) 2592.
9.	Найдите наибольший общий делитель чисел 140 и 105.	1) 5; 2) 35; 3) 70; 4) 14; 5) 45.
10.	Вычислить значение разности НОК(220; 28) – НОД(220; 28).	1) 1530; 2) 1538; 3) 1544; 4) 385; 5) 1536.
11.	Найти сумму остатков от деления чисел 138 и 215 на 9.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 8; 5) 11.
12.	Найти наибольшее натуральное число, которое при делении с остатком на 13 дает частное 8.	1) 104; 2) 112; 3) 117; 4) 116; 5) 118.
13.	Сумма остатков при делении числа 5891023 на 2, 10 и 3 равна:	1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 1.
14.	Произведение двух чисел равно 624, а их НОД равен 4. Найти НОК этих чисел.	1) 624; 2) 156; 3) 78; 4) 38; 5) 312.
15.	Если натуральные числа a и b такие, что $a + b = 71$, то числа a и b:	1) оба нечетные; 2) оба четные; 3) разной четности; 4) оба кратны 3; 5) оба больше 35.
16.	Если целые числа a и b такие, что $ab = 65$, то числа a и b:	1) одного знака, оба четные; 2) одного знака, оба нечетные; 3) разных знаков, оба четные.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
		4) разных знаков, оба нечетные; 5) одного знака и разной четности.
17.	Определите рациональные числа:	1) $\frac{2}{7}$; π; 2) 6; $\sqrt{7}$; 3) 0; e; 4) $-\sqrt{9}$; 2; 5) $\sqrt{2}$; $-1{,}3$.
18.	При каком наибольшем целом n число $\frac{5}{2n+3}$ является целым? В ответе указать значение выражения n^2+n.	1) 0; 2) -6; 3) 12; 4) 6; 5) 2.
19.	При каком наименьшем целом n число $\frac{4n-6}{4n+5}$ является целым? В ответе указать значение выражения $2n-7$.	1) -9; 2) -15; 3) -5; 4) -18; 5) 1.
20.	Округлить число 1,453 до сотых.	1) 1,4; 2) 1,46; 3) 1,45; 4) 0,45; 5) 1,44.
21.	Округлить число 13,468 до десятых.	1) 13; 2) 13,4; 3) 13,46; 4) 3,5; 5) 13,5.
22.	Указать сумму номеров правильных дробей: 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{7}{7}$; 4) $\frac{1}{19}$; 5) $\frac{5}{3}$.	1) 10; 2) 5; 3) 8; 4) 3; 5) 4.
23.	Какую часть прямоугольника составляет заштрихованная часть? 	1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{4}{15}$.
24.	Какую часть часа составляют 24 минуты?	1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{5}$; 5) $\frac{1}{3}$.
25.	Указать номера верных утверждений: 1) Взаимно обратные числа — это два числа, сумма которых равна 0. 2) Результатом вычисления $\frac{1}{4}-\frac{1}{7}$ является число $\frac{1}{3}$. 3) В результате деления дроби $\frac{2}{3}$ на 2 получим $\frac{4}{3}$. 4) Дробь $\frac{5}{28}$ на $\frac{1}{7}$ меньше дроби $\frac{9}{28}$. 5) Результатом вычисления $233\frac{5}{9}-232\frac{7}{9}$ является число $\frac{7}{9}$.	1) 1, 3, 4, 5; 2) 1, 3, 5; 3) 1, 4, 5; 4) 4, 5; 5) 3, 4, 5.
26.	Представьте бесконечную периодическую дробь 0,2(5) в виде обыкновенной несократимой. В ответ запишите сумму числителя и знаменателя полученной дроби.	1) 14; 2) 117; 3) 113; 4) 31; 5) 46.
27.	Указать все пары взаимно обратных чисел: а) $\frac{5}{7}$ и $-\frac{5}{7}$; б) $\frac{3}{11}$ и $3\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{12}$ и 11,9; г) $6\frac{3}{5}$ и 0,(15); д) $1\frac{1}{3}$ и 0,75.	1) а; 2) б, д; 3) б, г, д; 4) а, б, в, г; 5) а, б, г, д.
28.	Вычислить $\frac{1}{3}\cdot 2{,}8+5{,}4\cdot\frac{1}{3}-0{,}(3)\cdot 2{,}2$.	1) 1; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) -1; 4) 2; 5) -2.
29.	Вычислить $\dfrac{0{,}45-0{,}045\cdot 6{,}4}{-1\frac{1}{2}+1{,}1}$.	1) -1; 2) 9,71; 3) $-1{,}7$; 4) $-0{,}405$; 5) 0,405.
30.	Вычислить $\dfrac{2+(1{,}47:1{,}4-1{,}5)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right):(-0{,}15)}{0{,}23+\left(2\frac{5}{18}-5\frac{1}{12}+1\frac{2}{9}\right)\cdot(0{,}816:0{,}4)}$.	1) $-\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $-\frac{2}{9}$; 5) -1.
31.	Найти x из пропорции $\dfrac{x}{0{,}(6)+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{3}{5}\cdot 1{,}2+\frac{3}{5}\cdot 1{,}8}{\frac{3}{10}-\frac{3}{4}}$.	1) $-0{,}25$; 2) 0,5; 3) 1; 4) 4; 5) -4.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
32.	Найти x из пропорции $\frac{\left(5\frac{1}{3}:2{,}4+2\right)\cdot 2\frac{2}{5}-4{,}8}{x}=\frac{\frac{5}{9}-2\frac{1}{3}}{0{,}8\cdot\frac{3}{5}+0{,}8\cdot 1\frac{2}{5}}$.	1) –4,8; 2) 4,5; 3) 1; 4) 4,8; 5) –1.
33.	Найти 2 % от числа 150.	1) 1,5; 2) 2; 3) 3; 4) 30; 5) 20.
34.	Найти 17 % от числа $\frac{5}{34}$.	1) 2,5; 2) $\frac{5}{578}$; 3) $\frac{1}{20}$; 4) $\frac{1}{40}$; 5) 1.
35.	Найдите число, если 75 % его составляют 12.	1) 16; 2) 20; 3) 32; 4) 30; 5) 15.
36.	Если 15 % числа равны 0,1305, то само число равно:	1) 0,8; 2) 0,5; 3) 1; 4) 0,9; 5) 0,87.
37.	Сколько процентов составляет число 8 от числа 64?	1) 12; 2) 12,5; 3) 13; 4) 13,5; 5) 15.
38.	Сколько процентов составляет число 0,3 от числа $\frac{5}{19}$?	1) 3,8; 2) 3,7; 3) 38; 4) 32; 5) 37.

2. Тождественные преобразования алгебраических выражений. Вычисления с использованием формул сокращенного умножения

2.1. Формулы сокращенного умножения

1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

2) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;

3) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;

4) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

Для упрощения алгебраических выражений помимо перечисленных формул используют такие приемы, как разложение квадратного трехчлена на линейные множители (см. раздел 4), вынесение общего множителя, а также метод группировки. Для иллюстрации использования этих методов на практике рассмотрим пример.

Пример 1. Сократите дробь $\frac{(49a^2-16b^2)(b+1)}{4b-7ab+4b^2-7a}$.

Заметим, что $49a^2-16b^2=(7a)^2-(4b)^2$, и, применив затем формулу (2), разложим выражение на множители: $(7a)^2-(4b)^2=(7a-4b)(7a+4b)$. Сгруппируем по парам слагаемые в знаменателе: $(4b+4b^2)-(7ab+7a)$. Тогда после вынесения за каждую из скобок общего множителя получим: $4b(1+b)-7a(b+1)$ и, вынося за скобки общий множитель $(b+1)$, будем иметь: $4b(1+b)-7a(b+1)=(1+b)(4b-7a)$. Таким образом, вся дробь примет вид:

$$\frac{(7a-4b)(7a+4b)(b+1)}{(1+b)(4b-7a)}=\frac{-(4b-7a)(7a+4b)}{(4b-7a)}=-(7a+4b).$$

Ответ: $-7a-4b$.

2.2. Арифметический корень n-й степени и его свойства

Корнем *n*-й степени ($n\in N, n\geq 2$) из числа a называется такое число x, что $x^n=a$. Корень обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным выражением, а число n — показателем корня. Из определения следует, что $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

Арифметическим корнем *n*-й степени $n\in N, n\geq 2$ из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число x, что $x^n=a$.

Из приведенных определений следует, что при четном показателе степени корня символ $\sqrt[n]{a}$ обозначает только арифметический корень. Если показатель корня нечетный, то корень можно привести к арифметическому, например, $\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$.

Отметим также, что корень n-й степени из числа a — это решение уравнения $x^n=a$.

Если n — **нечетное** число:	Если n — **четное** число:
$\sqrt[n]{a}$ определен для любого действительного числа a и верно: а) $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$; б) $\sqrt[n]{a^n} = a$; в) уравнение $x^n = a$ имеет один корень для любого $a \in R$: $x = \sqrt[n]{a}$.	$\sqrt[n]{a}$ определен только для $a \geq 0$ и верно: а) $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$; б) уравнение $x^n = a$ имеет • при $a > 0$ два корня: $x_1 = \sqrt[n]{a}$ и $x_2 = -\sqrt[n]{a}$; • при $a = 0$ один корень: $x = 0$; • при $a < 0$ не имеет корней.

Напомним, что по определению, $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$

Пример 2. а) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$;

б) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$, так как $2-\sqrt{5} < 0$.

Свойства арифметического корня n-й степени (для любых допустимых значений a, b, x, n, m):

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $(\sqrt[n]{a^m})^x = \sqrt[n]{a^{mx}}$;

4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nx]{a^{mx}}$;

5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

При упрощении выражений часто необходимо выделить под корнем полный квадрат, например:

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}} = \sqrt{9-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2} = \sqrt{(3-2\sqrt{5})^2} = |3-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5}-3.$$

Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, домножают числитель и знаменатель дроби на выражение, которое в произведении с исходным дает рациональное выражение. Например:

а) $$\frac{m-1}{\sqrt{m}+1} = \frac{(m-1)(\sqrt{m}-1)}{(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-1)} = \frac{(m-1)(\sqrt{m}-1)}{m-1} = \sqrt{m}-1;$$

б) $$\frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} = \frac{7(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})} = \frac{7(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}{5+2} = \sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}.$$

2.3. Степень с натуральным, рациональным и действительным показателем

А) Степень с **натуральным** показателем.

Для любого действительного числа a и натурального n по определению $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$. Число a — основание степени, n — показатель степени.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Б) Степень с **рациональным** показателем.

Если $a > 0$, $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степень числа 0 определена только для показателей $\frac{m}{n} > 0$, в этом случае $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Если число $\frac{m}{n} < 0$, то выражение $a^{\frac{m}{n}}$ определено при $a > 0$.

В) Степень с **действительным** показателем.

Понятие степени с действительным показателем дается в учебнике с использованием понятия непрерывности. При этом выражение a^x при иррациональном значении x определено только при $a > 0$. Полагают, что $1^x = 1$ для любого x и $0^x = 0$ для $x > 0$.

Свойства степени с действительным показателем. Для любых положительных a и b, любых действительных x и y верны равенства:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $(a^x)^y = a^{xy}$; 3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$; 4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 5) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$; 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Вычислить $\dfrac{(0,7)^{12}\cdot\left(1\frac{3}{7}\right)^{15}}{\left(\frac{10}{7}\right)^{2}}$.	1) $1\frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) 0,7; 4) 0,49; 5) $2\frac{2}{49}$.
2.	Вычислить $\dfrac{1,6^{7}\cdot 0,625^{13}\cdot\left(1\frac{3}{5}\right)^{3}}{(3-1,4)^{-3}}$.	1) 0,625; 2) $0,625^2$; 3) 2,56; 4) 1,6; 5) 1.
3.	Представить выражение $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\cdot b^{6}}{a^{3}\cdot(ab)^{2}}$ в виде $a^n\cdot b^m$. В ответе указать сумму $n+m$.	1) 6; 2) –2; 3) 8; 4) 1; 5) –6.
4.	Представить выражение $\dfrac{(x^2y^3)^2\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}}{x^{7}\cdot y^{-3}}$ в виде $x^n\cdot y^m$. Найти разность $n-m$.	1) –6; 2) 20; 3) –20; 4) 6; 5) –8.
5.	Представить выражение $\dfrac{\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{0,5}}{(\sqrt{3})^{3}\cdot 27^{-\frac{4}{3}}}$ в виде 3^m. Найти $6m$.	1) 6; 2) –1; 3) 2; 4) 12; 5) –6.
6.	Представить выражение $\dfrac{12^{\frac{1}{4}}:4^{\frac{1}{4}}\cdot(\sqrt{2})^{5}\cdot(\sqrt[3]{3})^{7}}{3^{\frac{5}{3}}\cdot 8^{0,5}:24^{\frac{1}{2}}}$ в виде $2^m\cdot 3^n$. Найти разность $m-n$.	1) 12; 2) 10,5; 3) 12,5; 4) 13,5; 5) 14,5.
7.	Вычислить $6,989^2-3,011^2$.	1) 10; 2) 39,78; 3) 11,78; 4) 12,78; 5) 20.
8.	Вычислить $\dfrac{3,17^2+11,08\cdot 3,17+5,54^2}{8,71}$.	1) 1; 2) 9,71; 3) 11,71; 4) 2; 5) 8,71.
9.	Вычислить $\dfrac{3,25\cdot 4,28-1,15\cdot 5,22+3,25\cdot 5,22-1,15\cdot 4,28}{11,6^2-7,4^2}$.	1) 0,25; 2) 0,5; 3) 1; 4) 2; 5) 4.
10.	Вычислить $\dfrac{2^{16}\cdot 9^{7}+6^{13}\cdot 72}{8^{6}\cdot 3^{14}-6^{16}}$.	1) –0,8; 2) –1; 3) –0,1; 4) 2,5; 5) 1,2.
11.	Вычислить $\dfrac{25^{6}\cdot 49^{5}+35^{10}\cdot 150}{7^{11}\cdot 5^{13}-35^{11}\cdot 75}$.	1) 1; 2) –1,2; 3) –0,1; 4) 2; 5) –2.
12.	Найти значение выражения $64a^3-48a^2b+12ab^2-b^3$ при $a=6,25$; $b=23$.	1) 8; 2) 208; 3) 1; 4) 27; 5) –1.
13.	Разложить на множители $9a^2+12a-28b-49b^2$.	1) $(3a-7b)(3a+7b-4)$; 2) $(3a-7b)(3a-7b+4)$; 3) $(3a+7b)(3a+7b+4)$; 4) $(3a-7b)(3a+7b+4)$; 5) $(3a+7b)(3a+7b-4)$.
14.	Разложить на множители $16x^2-9y^2+6y-1$.	1) $(4x+3y+1)(4x-1)$; 2) $(4x+3y+1)(4x-3y-1)$; 3) $(4x-3y+1)(4x+3y-1)$; 4) $(4x+1)(4x+3y-1)$; 5) $(4x-3y)(4x+3y-1)$.
15.	Сократить дробь $\dfrac{x^3-y^3-x^2y+xy^2}{(x+y)^2-2xy}$.	1) 1; 2) $x+y$; 3) $\frac{1}{x-y}$; 4) $\frac{1}{x+y}$; 5) $x-y$.
16.	Сократить дробь $\dfrac{8a-3b+2ab-12}{4+b+4a+ab}$.	1) $\frac{b-4}{a-1}$; 2) $\frac{2a-3}{a-1}$; 3) $\frac{b-4}{a-1}$; 4) $\frac{2a-3}{a-1}$; 5) $a-b$.
17.	Найти значение выражения $\dfrac{4x^2-81y^2-4x+1}{2x+9y-1}+7y$ при $x=75,8$; $y=65,8$.	1) 10; 2) 19; 3) 20; 4) 12,8; 5) 20,8.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
18.	Упростить $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2+2x+1}$.	1) $(x+1)^2$; 2) x^2; 3) x^2-1; 4) x^2+1; 5) $(x-1)^2$.
19.	Найти x из пропорции: $\frac{4-12a+9a^2}{x}=\frac{15a+2b-10-3ab}{5-b}$.	1) $3a-2$; 2) b; 3) $2-3a$; 4) $b-5$; 5) $5-b$.
20.	Упростить: $\left(\frac{2}{9+3a}-\frac{4}{9-a^2}+\frac{1}{9-3a}\right)\cdot(9-6a+a^2)$.	1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{3-a}{3}$; 5) $\frac{a-3}{3}$.
21.	Упростить: $\left(\frac{2}{5a-25}-\frac{4}{a^2-25}-\frac{1}{5a+25}\right)\cdot(a^2+10a+25)$.	1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{a+5}{5}$; 3) 1; 4) $\frac{5-a}{a-1}$; 5) $a-5$.
22.	Найти значение выражения $(ab^{-1}-a^{-1}b)\cdot(a^{-1}-b^{-1})^{-2}\cdot\frac{1}{ab}$ при $a=-0{,}6$; $b=-\frac{1}{2}$.	1) 11; 2) 14; 3) 21; 4) 13; 5) 15.
23.	Найти значение выражения $(y^{-1}-x^{-1})\cdot(x^{-2}-y^{-2})^{-1}$ при $x=-0{,}8$; $y=\frac{5}{6}$.	1) 10; 2) 22; 3) 20; 4) 25; 5) –20.
24.	Указать число, которое находится между числами 3 и 4: а) $\sqrt[3]{66}$; б) $\sqrt[4]{17}$; в) $2\sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{26}$; д) $\sqrt[4]{90}$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
25.	Указать число, которое находится между числами 4 и 5: а) $\sqrt[3]{15}$; б) $\sqrt[4]{630}$; в) $2\sqrt{5}$; г) $\sqrt[3]{127}$; д) $\sqrt[4]{81}$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
26.	Результатом вынесения множителя из-под знака корня $\sqrt[6]{(-3)^6x^7}$ является:	1) $-3x\sqrt[6]{x}$; 2) $3x\sqrt[6]{x}$; 3) $-3x\sqrt[6]{-x}$; 4) $3x\sqrt[6]{-x}$; 5) $x\sqrt[6]{3x}$.
27.	Результатом вынесения множителя из-под знака корня $\sqrt{-27x^5}$ является:	1) $-3x^2\sqrt{3x}$; 2) $3x^2\sqrt{3x}$; 3) $-3x\sqrt{3x}$; 4) $-3x\sqrt{-3x}$; 5) $3x^2\sqrt{-3x}$.
28.	Результатом внесения множителя под знак корня $-2b\sqrt[6]{b^5}$ является:	1) $\sqrt[6]{64b^{11}}$; 2) $-\sqrt[6]{-64b^{11}}$; 3) $-\sqrt[6]{64b^{11}}$; 4) $-\sqrt[6]{32b^{11}}$; 5) $-\sqrt[6]{-32b^{11}}$.
29.	Результатом внесения множителя под знак корня $3a\sqrt{-a}$ является:	1) $\sqrt{9a^3}$; 2) $\sqrt{-9a^3}$; 3) $-\sqrt{9a^3}$; 4) $-\sqrt{-9a^3}$; 5) $\sqrt{3a^5}$.
30.	Результатом внесения множителя под знак корня $(5-a)\sqrt[4]{a-5}$ является:	1) $-\sqrt[4]{(5-a)^5}$; 2) $\sqrt[4]{(5-a)^5}$; 3) $-\sqrt[4]{(a-5)^5}$; 4) $\sqrt[4]{(a-5)^5}$; 5) $\sqrt[4]{(a-5)^5}$.
31.	Упростить $\frac{\sqrt{12}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}}{2}$.	1) 2; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $6\sqrt{3}$.
32.	Упростить $\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.	1) 4; 2) 3; 3) –1; 4) 2; 5) 5.
33.	Вычислить $\frac{1}{5\sqrt{2}-7}-\frac{2}{3\sqrt{2}-4}-\frac{2}{1+\sqrt{2}}$.	1) 4; 2) 3; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{2}$; 5) 5.
34.	Вычислить $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{5}{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}-\sqrt{22}$.	1) 5; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 1; 4) $5\sqrt{22}$; 5) $-5\sqrt{22}$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
35.	Сократить дробь $\frac{5\sqrt{2}-4\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}-1}$.	1) 2; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{10}$; 4) $5\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{5}$.
36.	Вычислить $\frac{\sqrt{(5-3\sqrt{3})^2}}{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[4]{(-16)^4}$.	1) –17; 2) 16; 3) –15; 4) 17; 5) 15.
37.	Вычислить $\sqrt[4]{(2\sqrt{11}-3\sqrt{5})^4}+\sqrt[5]{(2\sqrt{11}-3\sqrt{5})^5}$.	1) $4\sqrt{11}$; 2) 0; 3) $6\sqrt{5}$; 4) $-4\sqrt{11}$; 5) $4\sqrt{11}-6\sqrt{5}$.
38.	Вычислить $\sqrt[3]{-27}+\sqrt[8]{(-3)^8}+3\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$.	1) 0; 2) 6; 3) –1; 4) –6; 5) –3.
39.	Вычислить $200\cdot(\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}})^{-2}$.	1) 2; 2) 20; 3) 4; 4) 10; 5) 15.
40.	Вычислить $\sqrt[3]{1-2\sqrt{7}}\cdot\sqrt[6]{29+4\sqrt{7}}$.	1) 1; 2) 6; 3) –1; 4) 3; 5) –3.
41.	Вычислить $\sqrt{22-12\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}$.	1) 2; 2) 3; 3) –1; 4) –2; 5) –3.
42.	Вычислить $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}+\sqrt[5]{49\sqrt{7}}+\sqrt{19-4\sqrt{21}}}$.	1) $\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\sqrt[4]{3}$; 4) $\sqrt[4]{7}$; 5) 1.
43.	Вычислить $\frac{\sqrt[5]{(\sqrt{13}-2\sqrt{3})^4}}{\sqrt[5]{(\sqrt{13}+2\sqrt{3})}}+2\sqrt{3}$.	1) $2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) 1; 4) $\sqrt{13}+2\sqrt{3}$; 5) –1.
44.	Вычислить $\frac{36}{\sqrt{55+14\sqrt{6}}-7}$.	1) 6; 2) 12; 3) 4; 4) 9; 5) $6\sqrt{6}$.
45.	Вычислить $\frac{\sqrt{11\sqrt{2}-12}-\sqrt{17\sqrt{2}+24}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt{19\sqrt{2}-12}}$.	1) $2\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $-2\sqrt{2}$; 5) –1.
46.	Вычислить $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{(\sqrt{3}-2)(6-\sqrt{38})}-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}\right)\left(\sqrt[3]{(6-\sqrt{38})^2}+1\right)}{7-\sqrt{38}}+\sqrt{3}$.	1) $\sqrt{38}$; 2) $2\sqrt{3}-1$; 3) 1; 4) $-\sqrt{38}$; 5) –1.
47.	Вычислить $\sqrt[3]{89-\frac{59^2-19^2}{39}}\cdot\sqrt[6]{67^2-128\cdot67+2^{12}}$.	1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) –3; 4) 3; 5) $\sqrt[3]{3}$.
48.	Найти значение выражения $\frac{\sqrt[6]{1-4x+4x^2}}{\sqrt[3]{1-2x}}\cdot\sqrt{2x-1}$ при $x=5$.	1) 1; 2) $2\sqrt{3}$; 3) –3; 4) 3; 5) $2\sqrt{2}$.
49.	Найти значение выражения $\left(\sqrt[10]{a^2+8-4\sqrt{2}a}+2\sqrt[8]{2\sqrt{2}-a}\right)\sqrt[8]{2\sqrt{2}-a}$ при $a=\sqrt{7}$.	1) 1; 2) –1; 3) –3; 4) 3; 5) $2\sqrt{2}$.
50.	Найти значение выражения $\sqrt[6]{x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{2}}$ при $x=\sqrt{83}$.	1) $2\sqrt{2}$; 2) 3; 3) 9; 4) $2\sqrt{83}$; 5) –9.
51.	Вычислить: $4^{\frac{3}{2}}-8^{\frac{1}{3}}+3\cdot16^{\frac{3}{4}}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}$.	1) 27; 2) 14; 3) 12; 4) 21; 5) 32.
52.	Вычислить: $64^{\frac{2}{3}}-\frac{25^{0,5}}{(0,0016)^{0,25}}+(1,25)^0$.	1) –6; 2) 1; 3) –8; 4) 2; 5) 0,5.
53.	Найти значение выражения $\frac{b^{1,5}}{b^{0,5}+2}+\frac{2b^{1,5}-16}{b-4}$ при $b=29$.	1) 29; 2) 25; 3) 16; 4) 24; 5) 33.
54.	Упростить выражение $\left(\frac{1+x^{1,5}}{1-x^{0,5}+x}-x^{0,5}\right):\frac{1-x^{0,5}}{1-x}$.	1) $x+1$; 2) $1-x$; 3) $x^{0,5}-1$; 4) $x^{0,5}+1$; 5) 1.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
55.	Упростить выражение $\left(\frac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}-2x^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}$.	1) $x^{\frac{1}{3}}+1$; 2) $1-x^{\frac{1}{3}}$; 3) $x^{\frac{1}{3}}-1$; 4) $x^{\frac{2}{3}}+1$; 5) 1.
56.	Найти значение выражения $\left(\frac{m^{\frac{2}{7}}-2m^{\frac{1}{7}}}{m^{\frac{1}{7}}-2}-1\right)\cdot\frac{m^{\frac{2}{7}}-1}{m^{\frac{1}{7}}-1}$ при $m=1{,}28\cdot10^{-5}$.	1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) –0,96; 4) –0,6; 5) 3.
57.	Найти значение выражения $\left(\frac{3}{3b^{\frac{1}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}-\frac{4}{9-b^{\frac{2}{5}}}+\frac{-1}{3b^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{2}{5}}}\right)\cdot\left(9+6b^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{2}{5}}\right)$ при $b=32$.	1) 15; 2) $\frac{1}{15}$; 3) 1; 4) –2; 5) 2.
58.	Упростить выражение $\left(\frac{2}{5\sqrt{a}-25}-\frac{4}{a-25}-\frac{1}{5\sqrt{a}+25}\right)\cdot(a+10\sqrt{a}+25)$.	1) 1; 2) $\frac{\sqrt{a}}{5}+1$; 3) 2; 4) $\frac{\sqrt{a}}{5}-1$; 5) $\sqrt{a}-5$.
59.	Упростить выражение $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}+\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{1-\sqrt[3]{x^2}}\cdot\left(\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\right)^{-1}$.	1) 1; 2) $\sqrt[3]{x^2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\sqrt[3]{x}$; 5) –1.
60.	Найти значение выражения $\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3-3\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+\sqrt{x}y}$ при $x=24$, $y=96$.	1) 2; 2) 3; 3) –1; 4) –2; 5) –3.
61.	Найти значение выражения $\frac{b^{5\pi}-b^{\pi}}{2b^{3\pi}-(0{,}5)^{-1}b^{2\pi}}$ при $b=4^{\frac{1}{2\pi}}$.	1) 0,25; 2) 0,125; 3) –0,125; 4) –0,25; 5) –0,5.
62.	Упростить выражение $\left(\frac{x^{\frac{\sqrt{2}}{5}}-x^{\sqrt{2}}}{1-x^{\frac{4\sqrt{2}}{5}}}+1\right)\cdot\frac{x^{\frac{2\sqrt{2}}{5}}-1}{x^{\frac{\sqrt{2}}{5}}-1}$.	1) 1; 2) $x^{\frac{2\sqrt{2}}{5}}$; 3) 2; 4) $x^{\frac{2\sqrt{2}}{5}}-1$; 5) $x^{\frac{2\sqrt{2}}{5}}+1$.
63.	Найти значение выражения $\left(\frac{3}{x^{\sqrt{5}}-1}+\frac{3x^{2\sqrt{5}}+3}{1-x^{2\sqrt{5}}}:\frac{x^{3\sqrt{5}}+x^{\sqrt{5}}}{x^{3\sqrt{5}}+1}+3\right)^{1+2\sqrt{5}}$ при $x=9$.	1) 1; 2) $9^{\sqrt{5}}$; 3) 3^{-9}; 4) $9^{2\sqrt{5}}$; 5) 3^{-19}.

3. Линейные уравнения, неравенства и их системы. Линейная функция

3.1. Линейные уравнения и их системы

Линейным уравнением называется уравнение вида $ax + b = 0$. Возможны три случая: 1) если $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$; 2) если $a = 0$ и $b = 0$, то $x \in R$; 3) если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Системой линейных уравнений с двумя неизвестными называется система вида: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ (1) Решить данную систему — значит найти все пары $(x; y)$ такие, что при подстановке в каждое уравнение системы оно обращается в верное равенство. Если одно из уравнений системы не имеет решений, то и вся система не имеет решений.

Основные методы решения систем линейных уравнений — ***метод подстановки*** и ***метод алгебраического сложения***.

Графическая интерпретация решения системы. Решить систему (1) означает:

1) найти координаты точки пересечения прямых, заданных формулами $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ (если система имеет одно решение);

2) доказать, что эти прямые параллельны (если система не имеет решений);

3) доказать, что эти прямые совпадают (если система имеет бесконечное множество решений).

3.2. Линейные неравенства

Неравенства вида $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — линейные функции, называются линейными неравенствами с одной переменной. Неравенства со знаками «<» или «>» называют строгими; а со знаками «$\geq$» и «$\leq$» — нестрогими.

Решением неравенства с одной переменной называют такое значение переменной, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство. Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Двойным неравенством называют неравенство вида $a < b < c$. Оно равносильно системе неравенств: $\begin{cases} b > a, \\ b < c \end{cases}$.

Свойства неравенств:

1) В любом неравенстве можно переносить слагаемые из одной части в другую, изменяя при этом знак слагаемого на противоположный.

2) Обе части неравенства можно домножать (делить) на любое положительное число.

3) Если обе части неравенства домножают (делят) на отрицательное число, то знак неравенства меняется на противоположный.

Решением *системы неравенств* являются те значения переменной, которые удовлетворяют одновременно всем неравенствам этой системы. Для их нахождения необходимо найти множество решений каждого из неравенств и затем пересечь эти множества.

3.3. Линейная функция

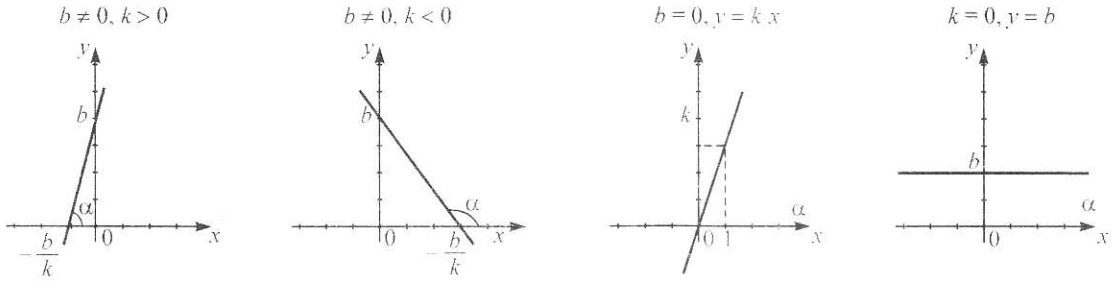
Линейная функция — это функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — действительные числа. График линейной функции — *прямая*. Число k — **угловой коэффициент** прямой; $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox. При $k > 0$ линейная функция возрастает на всей числовой прямой, при $k < 0$ — убывает на R.

Прямые, заданные формулами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$. Прямые пересекаются в одной точке, если $k_1 \neq k_2$.

Функция $y = kx$ называется **прямая пропорциональность**. Ее график всегда проходит через начало координат.

Функция $y = b$ — постоянная, ее графиком является прямая, параллельная оси Ox.

График линейной функции при различных значениях k и b:

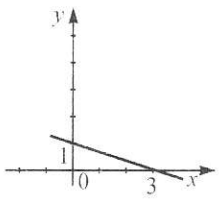
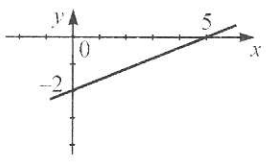


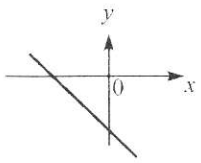
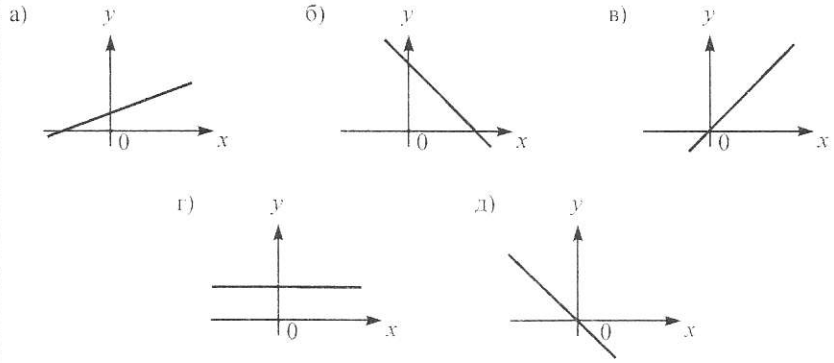
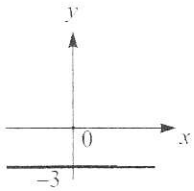
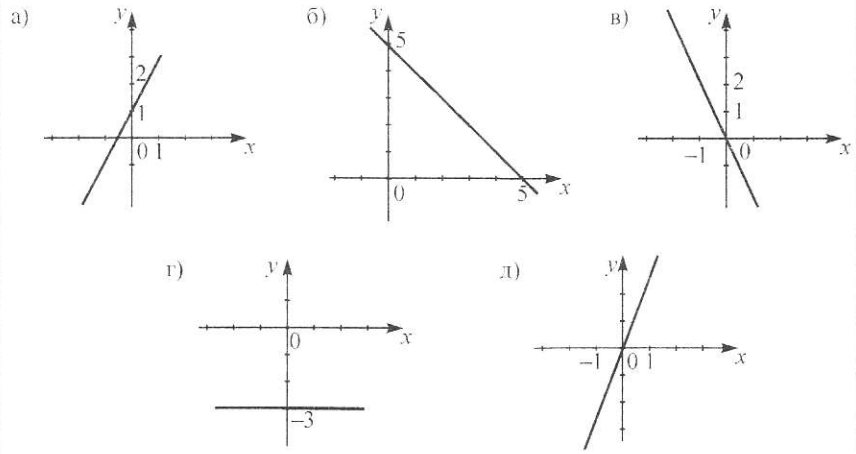
Любое уравнение вида $ax + by = c$, где хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю, в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости Oxy задает прямую. Случаи, когда $b \neq 0$, перечислены выше.

Если $b = 0$, то уравнение $x = \frac{c}{a}$ также задает прямую, параллельную оси Oy, которая не является графиком функции.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Корнем уравнения $5(x - 1) - 2(x + 3) = 4$ является число:	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
2.	Корнем уравнения $\frac{x+6}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{3x+7}{6}$ является число:	1) 5; 2) –3; 3) 3; 4) 6,5; 5) –2,7.
3.	Корнем уравнения $\frac{3x-1}{4} + \frac{x+12}{3} - \frac{5x+1}{18} = -\frac{1}{3}$ является число:	1) –6; 2) –2; 3) –3; 4) –4; 5) –5.
4.	Корнем уравнения $(\sqrt{2} - 1)(x + 1) = 0$ является число:	1) $\sqrt{2} - 1$; 2) –1; 3) $1 - \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2}$; 5) 1.
5.	Корнем уравнения $0,2(x - 5) + 0,8(1 - x) - 2,4(2x + 5) = 4$ является число:	1) 6; 2) –2; 3) –3; 4) 3; 5) 5.
6.	Корнем уравнения $2x(x - 2) + 3x^2 - 5(x^2 + 6x + 1) = 12$ является число:	1) –1,5; 2) –3; 3) 3; 4) –2,7; 5) –0,5.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
7.	Корнем уравнения $\frac{2x^2-3}{8}+\frac{5x^2+12x+1}{2}-\frac{11x^2-x+3}{4}=0$ является число:	1) 0,1; 2) 0,3; 3) 3; 4) –0,5; 5) –0,7.
8.	Решить уравнение $3(x-12)-4x\cdot 0{,}75=-36$.	1) 0; 2) нет решений; 3) $x\in R$; 4) –1; 5) 1.
9.	Решить уравнение $17x-26-3(6x-1{,}(3))+x=0$.	1) 0; 2) нет решений; 3) $x\in R$; 4) –1; 5) 1.
10.	Решить уравнение $\frac{x}{\sqrt{3}-2}+\sqrt{3}x-2\left(x-1\frac{1}{2}\right)=0$.	1) 1; 2) нет решений; 3) $x\in R$; 4) –1; 5) 0,75.
11.	Решить уравнение $\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot x-30=x\sqrt{5}$.	1) 1; 2) нет решений; 3) $x\in R$; 4) 15; 5) 30.
12.	Решить уравнение $\sqrt{11-6\sqrt{2}}\cdot x+\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot x=-24$.	1) –2; 2) –4; 3) $11-6\sqrt{2}$; 4) 4; 5) $11+6\sqrt{2}$.
13.	Решить уравнение $\sqrt{2}x-\sqrt{2}=\sqrt{3}x$.	1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $2+\sqrt{6}$; 4) $2-\sqrt{6}$; 5) $-2-\sqrt{6}$.
14.	Решить систему уравнений $\begin{cases}6x-4y=5,\\3x+4y=40.\end{cases}$	1) (5; 6,5); 2) (5; 6,25); 3) (5; 6); 4) (–5; 6); 5) (4; 6,25).
15.	Если x и y таковы, что $\begin{cases}5x-6{,}5=\frac{x}{2}+y,\\5x-y=3{,}5,\end{cases}$ то значение $x-y$ равно:	1) 27,5; 2) 20; 3) –6; 4) –39,5; 5) –33,5.
16.	Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}x+13y=57,\\2(3{,}25y-14)+0{,}5x=0\end{cases}$?	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) бесконечно много.
17.	Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}5x-0{,}3y=8,\\4(2{,}5x-4)=0{,}6y\end{cases}$?	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) бесконечно много.
18.	Указать количество целых чисел x, удовлетворяющих условию $-13{,}2<x\le 4$.	1) 16; 2) 17; 3) 18; 4) 19; 5) 20.
19.	Указать количество натуральных чисел, принадлежащих промежутку $[-3; 6)$.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.
20.	Решением неравенства $3x>\frac{x-28}{-2}$ является множество:	1) $(-\infty; 4)$; 2) $(-\infty; -4)$; 3) $(4; +\infty)$; 4) $(-4; +\infty)$; 5) $[4; +\infty)$.
21.	Сумма целых отрицательных решений неравенства $0{,}3(2x-1)-1{,}6(x+5)-1{,}7\le 0$ равна:	1) –45; 2) –55; 3) –36; 4) –28; 5) –9.
22.	Количество целых решений неравенства $\frac{2x-4}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-x(\sqrt{2}-3)<1.8$, удовлетворяющих условию $x\in[-3; 3]$, равно:	1) 7; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.
23.	Решением двойного неравенства $-4<5-3x\le 2$ является множество:	1) $(-3; -1)$; 2) $(1; 3)$; 3) $(1; 3]$; 4) $[1; 3)$; 5) $(-3; -1]$.
24.	Сумма целых решений системы неравенств $\begin{cases}1<3-\frac{x}{5}<3,\\(3\sqrt{3}-6)(x-4)\ge 3\sqrt{3}-6\end{cases}$ равна:	1) 10; 2) 35; 3) 30; 4) 15; 5) –12.
25.	Решением системы неравенств $\begin{cases}7{,}5x-2\left(3\frac{1}{4}x+1\right)>-2,\\17x-0{,}2\ge 3(6x-3{,}4)\end{cases}$ является множество:	1) $(-\infty; 0)$; 2) $(10; +\infty)$; 3) $[0; 10)$; 4) $(0; 10)$; 5) $(0; 10]$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
26.	Решить систему неравенств $\begin{cases} (\sqrt{13}-4)(x+1)\geq 0, \\ \dfrac{9x-1}{2}-\dfrac{4x+3}{3}>2, \\ 2,(1)+x\geq\dfrac{1}{9}. \end{cases}$	1) $\left(\frac{21}{19};+\infty\right)$; 2) $\left[-2;\frac{21}{19}\right)$; 3) $x\in R$; 4) нет решений; 5) $[-2;+\infty)$.
27.	Найти область определения функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-6}}{4}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x-3}}$.	1) $(-\infty;2)$; 2) $(4;+\infty)$; 3) $[2;+\infty)$; 4) $(3;+\infty)$; 5) $[2;3)\cup(3;+\infty)$.
28.	Найти область определения функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{12}+\dfrac{8x}{\sqrt{16-4x}}$.	1) $(-\infty;1,5)$; 2) $(4;+\infty)$; 3) $[1,5;4)$; 4) $(1,5;+\infty)$; 5) $[1,5;4)\cup(4;+\infty)$.
29.	Указать количество натуральных чисел, принадлежащих области определения функции $f(x)=2x^2-\dfrac{\sqrt{28-4x}}{-x+6}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x+1}}$.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.
30.	Указать количество натуральных простых чисел, принадлежащих области определения функции $f(x)=\sqrt[6]{\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{27x-366}{6}}$.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.
31.	Из функций: а) $y=\frac{x}{3}-4$; б) $y=(x-2)^2$; в) $y=\frac{5}{x}+1$; г) $y=4-1,3x$; д) $y=\sqrt{x}$ выбрать линейные.	1) а, в, г; 2) а, б, г; 3) б, в, г; 4) а, г; 5) б, г.
32.	Из перечисленных линейных функций: а) $y=7-4x$; б) $y+8x=2$; в) $y=4-\frac{x}{12}$; г) $y=(\sqrt{7}-3)x+1$; д) $2y-5x=1$ выбрать возрастающие на всей числовой прямой.	1) б, в, д; 2) а, б, г; 3) б, в, г; 4) д; 5) г, д.
33.	Нуль функции $y=1,3x+6,5$ равен:	1) –5; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) –4.
34.	Из точек $A(1;7)$, $B(2;8)$, $C(-4;5)$, $D(3;8)$, $E(-2;-8)$ выбрать те, которые принадлежат графику функции $y=\frac{x}{2}+7$.	1) A, B, C; 2) A, C; 3) B, C; 4) B, C, D; 5) B, E.
35.	Если линейная функция задана формулой $y=4,5(2x-6)-3x$, то угловой коэффициент соответствующей прямой равен:	1) 4,5; 2) 9; 3) 2; 4) 6; 5) 4.
36.	Из прямых, заданных уравнениями: а) $y=4-x$; б) $y+x=12$; в) $y-2x=0$; г) $y=x-1$; д) $5y=7-5x$ выбрать параллельные.	1) а, б, д; 2) а, б, г; 3) б, в, г; 4) а, б; 5) в, д.
37.	При каких значениях x график функции $y=-4x+12$ расположен ниже оси Ox?	1) $(-\infty;3)$; 2) $(-3;+\infty)$; 3) $[3;+\infty)$; 4) $(3;+\infty)$; 5) $(-\infty;-3]$.
38.	Найти угловой коэффициент k прямой, заданной формулой $y=kx+b$, график которой изображен на рисунке. 	1) –3; 2) 3; 3) $\frac{1}{3}$; 4) –1; 5) $-\frac{1}{3}$.
39.	На рисунке изображен график линейной функции, заданной формулой $y=kx+b$. Найти сумму $k+b$. 	1) 1,6; 2) –2; 3) 0,4; 4) –1,6; 5) 2.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
40.	На рисунке изображен график линейной функции. Эта функция может задаваться формулой: 	1) $y = -1{,}5x$; 2) $y = x - 4$; 3) $y = x + 4$; 4) $y = -x + 4$; 5) $y = -x - 4$.
41.	Из графиков *а—д* выбрать график функции $y = 0{,}2x + 2$. 	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
42.	На рисунке изображен график линейной функции. Какая точка принадлежит графику этой функции? 	1) (–3; 0); 2) (–3; 3); 3) (2; –3); 4) (2; 3); 5) (0; –5).
43.	На рисунках *а—д* изображены графики функций: $y + x = 5$, $y = -3$, $y = 2x + 1$, $y = 4x$, $y = -2x$ (в произвольном порядке). В ответе укажите такой порядок графиков *а—д*, который соответствует порядку перечисления функций. 	1) а, б, в, г, д; 2) б, а, г, в, д; 3) б, г, а, д, в; 4) б, г, а, в, д; 5) в, г, а, д, б.
44.	При каких значениях x график функции $y = 3x - 7$ расположен выше графика функции $5x - y = 1$?	1) $(-\infty; 3)$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; +\infty)$; 5) $[3; +\infty)$.
45.	Найти абсциссу точки пересечения графиков функций $y = \frac{x}{5} + 4$ и $y - \frac{x}{2} = 1$.	1) 10; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) 16; 4) 15; 5) –15.
46.	Найти сумму координат точки пересечения графиков функций $11x + y = -5$ и $2x + 3y = 6$.	1) $-\frac{21}{31}$; 2) $2\frac{14}{31}$; 5) $\frac{25}{31}$; 4) $1\frac{24}{31}$; 5) правильный ответ не указан.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
47.	Найти сумму координат точки пересечения графиков функций $7x + y = -6$ и $y = -7x - 5$.	1) 1,6; 2) –2; 3) 0,4; 4) –1,6; 5)прямые параллельны.
48.	Найдите площадь треугольника, ограниченного графиком функции $2y - 3x = 12$ и осями координат.	1) 6; 2) 12; 3) 4; 4) 24; 5) 18.
49.	Укажите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 4x - 15$ и проходящей через точку (1; 10).	1) $y - 10x = 6$; 2) $y - 5x = 5$; 3) $y = 4x + 10$; 4) $y - 4x = 5$; 5) $y = 4x + 6$.
50.	Укажите уравнение прямой, проходящей через точки (1; 11) и (–2; 7).	1) $y - 2x = 9$; 2) $3y - 4x = 29$; 3) $y = 4x + 15$; 4) $y - 4x = 7$; 5) $y = 4x + 6$.

4. Квадратные уравнения и неравенства. Теорема Виета. Квадратичная функция

4.1. Квадратичная функция

Квадратичная функция — это функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b и c — действительные числа. Ее график — **парабола**, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

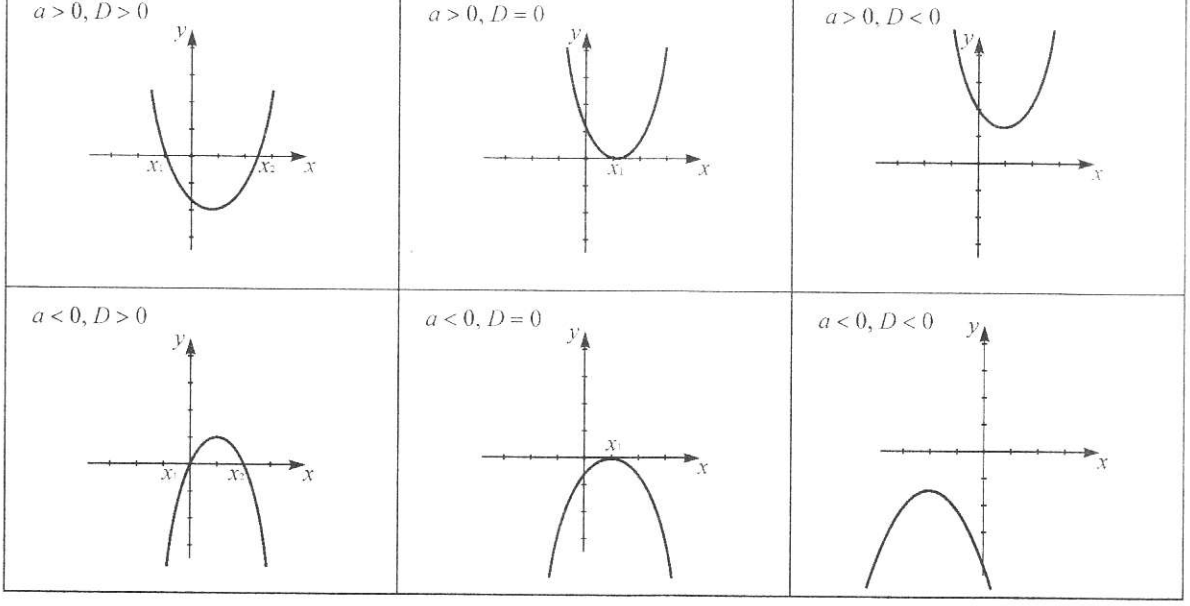
Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = y(x_в)$. Осью симметрии параболы является прямая $x = x_в$.

Выделив полный квадрат, любую квадратичную функцию можно представить в виде $y = a(x + m)^2 + n$. Тогда координаты вершины параболы будут равны $(-m; n)$.

Область определения функции — вся числовая прямая, ее область значений: а) $[y_в; +\infty)$ при $a > 0$; б) $(-\infty; y_в]$ при $a < 0$.

Функция возрастает на промежутке $[x_в; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; x_в]$ при $a > 0$. Функция возрастает на промежутке $(-\infty; x_в]$ и убывает на промежутке $[x_в; +\infty)$ при $a < 0$.

Наличие точек пересечения графика с осью Ox определяет знак **дискриминанта**: $D = b^2 - 4ac$. Различные случаи расположения графика квадратичной функции представлены на рисунке:



4.2. Квадратные уравнения

Решение полных квадратных уравнений, т. е. уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$:

1) при $D > 0$ уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, парабола пересекает ось Ox в двух точках;

2) при $D = 0$ уравнение имеет один корень: $x = \frac{-b}{2a}$, парабола касается оси Ox, т. е. имеет с ней одну общую точку;

3) при $D < 0$ уравнение не имеет корней, парабола не пересекает ось Ox.

Если в полном квадратном уравнении коэффициент b — **четное целое** число, то можно найти корни уравнения по следующим формулам:

$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$. $x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$. $x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$, применение которых позволяет существенно упростить арифметические вычисления.

Квадратное уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$ (т. е. при $a = 0$) называется *приведенным квадратным*.

Решение неполных квадратных уравнений:

1) Уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ всегда имеет два корня: $x(ax + b) = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.

2) Уравнение вида $ax^2 + c = 0$:

— при $c \neq 0$ *не имеет корней*, если знаки a и c совпадают;

— уравнение *имеет два корня*, если знаки a и c различны: $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3) при $c = 0$ и $b = 0$ уравнение *имеет один корень*: $x = 0$.

4.3. Теорема Виета

1. *Прямая*. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то верны равенства: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Для приведенного квадратного уравнения получим: $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 \cdot x_2 = c$.

2. *Обратная*. Если дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ неотрицательный ($D \geq 0$) и числа x_1 и x_2 таковы, что выполняются равенства $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то x_1 и x_2 являются корнями данного квадратного уравнения.

Обратную теорему Виета часто используются для:

1) подбора корней без решения уравнения (отметим, что условие $D \geq 0$ необходимо проверять до того, как вы начали искать корни уравнения с использованием теоремы Виета);

2) определения знаков корней без решения уравнения;

3) при решении задач на нахождение значения выражения, зависящего от корней данного квадратного уравнения.

Например. Найти значение выражения $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 + 5x - 1 = 0$.

По условию имеем: $D = 25 + 12 = 37$ — дискриминант исходного уравнения положительный, значит $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$.

Преобразуем исходное выражение и найдем его значение:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 31.$$

Ответ: 31.

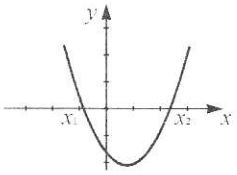
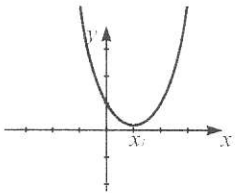
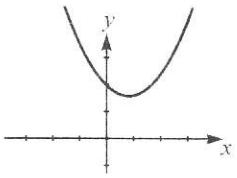
4.4. Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение вида $ax^2 + bx + c$ называется квадратным трехчленом.
Если $D > 0$ и соответствующее квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2, то верно равенство:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Если $D = 0$ и соответствующее квадратное уравнение имеет один корень x_1, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

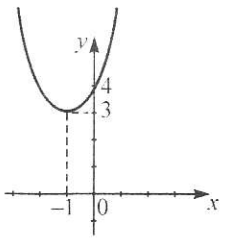
4.5. Квадратные неравенства

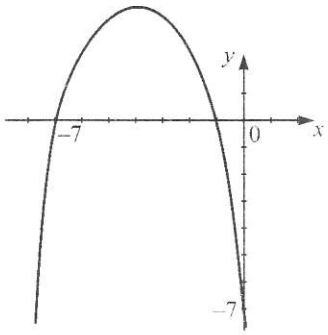
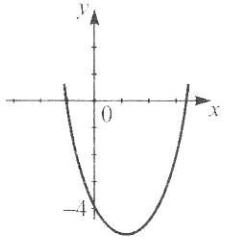
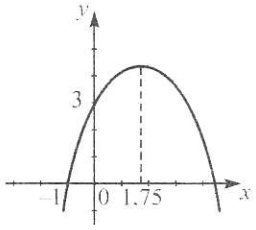
Это неравенства вида $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$.

В случае, когда $a < 0$, удобно умножить неравенство на -1, изменив все знаки в левой части на противоположные, и изменить знак неравенства. Поэтому далее рассмотрены только случаи $a > 0$.

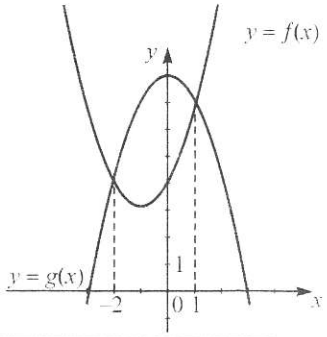
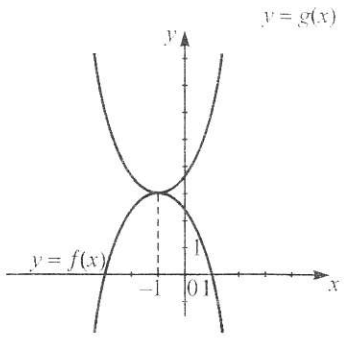
1) $D > 0$ 	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in (x_1; x_2)$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in [x_1; x_2]$
2) $D = 0$ 	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in (-\infty; +\infty)$
	$ax^2 + bx + c < 0$ нет решений	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x = x_1$
3) $D < 0$ 	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in (-\infty; +\infty)$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in (-\infty; +\infty)$
	$ax^2 + bx + c < 0$ нет решений	$ax^2 + bx + c \leq 0$ нет решений

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти меньший корень уравнения $3x^2 + 14x - 5 = 0$.	1) 5; 2) –5; 3) –3; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $-\frac{1}{3}$.
2.	Найти модуль разности корней уравнения $2x^2 + 7x - 4 = 0$.	1) 3,5; 2) 4; 3) 0,5; 4) 4,5; 5) 2.
3.	Найти сумму корней уравнения $(2x - 1)^2 + 3(4x - 2) = 0$.	1) –6; 2) –2; 3) –3; 4) –4; 5) –5.
4.	Найти произведение корней уравнения $x(5x - 1) = -1$.	1) $\frac{1}{5}$; 2) $-\frac{1}{5}$; 3) 1; 4) –1; 5) нет корней.
5.	Произведение корней уравнения $102x^2 - 13x - 52 = 0$ принадлежит промежутку:	1) (0; 0,5); 2) (–0,5; 0); 3) (–100; –50); 4) (–50; –10); 5) (–1; –0,5).
6.	Найти сумму модулей корней уравнения $x^2 + 40^2 = 104^2$.	1) 96; 2) 86; 3) 0; 4) 192; 5) 52.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
7.	Среднее арифметическое корней уравнения $x^2-\frac{2x}{\sqrt{6}-2}+\sqrt{6}x=0$ равно:	1) 0; 2) 1; 3) 1,5; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 2.
8.	Сократить дробь $\frac{25-x^2}{3x^2-11x-20}$.	1) $\frac{x+5}{3x+4}$; 2) $-\frac{x+5}{3x+4}$; 3) $\frac{x-5}{x+\frac{4}{3}}$; 4) $\frac{x+5}{x-\frac{4}{3}}$; 5) 1.
9.	Сократить дробь $\frac{2x^2-15x-8}{8x-x^2}$.	1) $-2-\frac{1}{x}$; 2) $2+\frac{1}{x}$; 3) 1; 4) $-2+\frac{1}{x}$; 5) $-1-\frac{1}{x}$.
10.	Упростить выражение $\left(\frac{1}{x+2}+\frac{5}{x^2-x-6}+\frac{2x}{x-3}\right)\cdot\frac{x}{2x+1}-\frac{x-9}{2(3-x)}$.	1) 1; 2) 1,5; 3) 2; 4) –2; 5) –1.
11.	Упростить выражение $\left(\frac{3a-1}{a^2-4}-\frac{9a}{3a^2+5a-2}\right)\cdot\frac{15a^3-60a}{12a+1}+\frac{5}{1-3a}$.	1) 1; 2) 2; 3) –5; 4) 5; 5) –2.
12.	Упростить выражение $\left(\frac{4}{5a^2+a-4}-\frac{a+1}{9(5a-4)}\right)\cdot\frac{15a-12}{a+7}-\frac{2}{a+1}$.	1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) 3; 4) –3; 5) 2.
13.	Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2-5x-7=0$.	1) 25; 2) –7; 3) 13; 4) 39; 5) 18.
14.	Найти значение выражения $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $7x^2+x-1=0$.	1) $\frac{15}{7}$; 2) $\frac{1}{7}$; 3) 15; 4) 19; 5) 18.
15.	Графиками каких из перечисленных функций: а) $y=(x-3)^2$; б) $y+x=5$; в) $y=\frac{x^2}{9}-1$; г) $y=\sqrt{x-3}$; д) $y=\frac{5}{x^2}$ являются параболы?	1) а, в, г; 2) а, в, д; 3) б, в, г; 4) а, в; 5) б, г.
16.	Графиками каких из перечисленных функций: а) $y=1+4x-x^2$; б) $y=(5-x)^2$; в) $y=3(x-4)-(x-1)^2$; г) $y=9-\frac{x^2}{7}$; д) $y-x^2=15$ являются параболы, ветви которых направлены вниз?	1) а, в, г; 2) а, в, д; 3) б, в, г; 4) а, в; 5) б, г.
17.	Найти область значений функции $y=x^2+4x+6$.	1) $(-\infty;2]$; 2) $(-2;+\infty)$; 3) $[2;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2)$; 5) $(-\infty;-2]$.
18.	Найти область значений функции $y=15-6x-x^2$.	1) $(-\infty;24]$; 2) $(-3;+\infty)$; 3) $[24;+\infty)$; 4) $(-\infty;-24)$; 5) $(-\infty;-3]$.
19.	Найти сумму координат вершины параболы, заданной формулой $y=2x^2-2x+7$.	1) 2; 2) 1; 3) 7; 4) 8; 5) 5.
20.	На рисунке изображен график функции $y=x^2+bx+c$. Найдите сумму $b+c$. 	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
21.	На рисунке изображен график квадратичной функции. Эта функция может задаваться формулой: 	1) $y = -x^2 - 7$; 2) $y = -x^2 + 7x + 7$; 3) $y = -x^2 - 7x - 7$; 4) $y = -x^2 - 8x - 7$; 5) $y = -x^2 + 8x - 7$.
22.	На рисунке изображен график квадратичной функции. Эта функция может задаваться формулой: 	1) $y = x^2 - 4$; 2) $y = -x^2 + x - 4$; 3) $y = x^2 + 2x - 4$; 4) $y = x^2 + 4x - 4$; 5) $y = x^2 - 6x - 4$.
23.	Найдите уравнение квадратичной функции, график которой изображен на рисунке, если известно, что наибольшего значения функция достигает при $x = 1{,}75$. 	1) $3y = 2x^2 + 7x + 9$; 2) $3y = -2x^2 + 7x + 9$; 3) $3y = -2x^2 - 7x + 9$; 4) $3y = -2x^2 + 7x - 9$; 5) $3y = -2x^2 - 7x - 9$.
24.	Найти произведение абсцисс точек пересечения графика функции $y = 2x^2 - 4x + 1$ с прямой $y = 15$.	1) –7; 2) 1; 3) 7; 4) 8; 5) графики не пересекаются.
25.	Найти сумму абсцисс точек пересечения графиков функций $y = 15x^2 - 7x + 12$ и $y = 13x^2 - 12x + 10$.	1) 1; 2) –2,5; 3) –2 ; 4) –1; 5) графики не пересекаются.
26.	Найти сумму абсцисс точек пересечения графиков функций $y = 3x^2 - 10x + 6$ и $y + 8x = 5$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) графики не пересекаются.
27.	Указать промежутки возрастания функции $y = x^2 - 1$.	1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0]$.
28.	При каких значениях x функция $y = -x^2 + 4x - 3$ убывает?	1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2]$; 4) $[4; +\infty)$; 5) $(-\infty; 4]$.
29.	Сравнить значения $f(\sqrt{15})$ и $f(4)$, где $f(x) = x^2 - 8x + 12$.	1) $f(\sqrt{15}) > f(4)$; 2) $f(\sqrt{15}) < f(4)$; 3) $f(\sqrt{15}) = f(4)$; 4) нельзя сравнить.
30.	Сравнить значения $f(16+\sqrt{3})$ и $f(16-\sqrt{3})$, где $f(x) = x^2 - 32x + 255$.	1) $f(16+\sqrt{3}) > f(16-\sqrt{3})$; 2) $f(16+\sqrt{3}) < f(16-\sqrt{3})$; 3) $f(16+\sqrt{3}) = f(16-\sqrt{3})$; 4) нельзя сравнить.
31.	Сравнить значения $f(115)$ и $f(201)$, где $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$.	1) $f(115) > f(201)$; 2) $f(115) < f(201)$; 3) $f(115) = f(201)$; 4) нельзя сравнить.
32.	Из прямых, заданных уравнениями: а) $y = -2$; б) $x = -2$; в) $y = -4$; г) $x = 4$; д) $x = 2$, выбрать ось симметрии параболы $y = x^2 + 4x$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
33.	Найти сумму целых решений неравенства $x^2 - 7x + 10 \le 0$.	1) 12; 2) 9; 3) 7; 4) 14; 5) 5.
34.	Найти произведение натуральных решений неравенства $-x^2 + 3{,}5x + 2 > 0$.	1) 0; 2) 1; 3) 6; 4) 2; 5) 24.
35.	Найти длину интервала, являющегося решением неравенства $x^2 < \frac{49}{4}$.	1) 2; 2) 7; 3) 1; 4) 8; 5) 5.
36.	Указать наибольшее отрицательное целое решение неравенства $\frac{121}{36} - x^2 < 0$.	1) –2; 2) –1; 3) –3; 4) –4; 5) –5.
37.	При каких значениях x график функции $y = 5x^2 - 6x + 10$ расположен выше графика функции $y - 4x = 5$?	1) при всех x; 2) только при $x = 1$; 3) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 4) ни при каких x; 5) $(1; +\infty)$.
38.	При каких значениях x график функции $y = -4x^2 + 4x - 1$ расположен не ниже оси абсцисс?	1) при всех x; 2) только при $x = 0{,}5$; 3) $(-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; 4) ни при каких x; 5) $(0{,}5; +\infty)$.
39.	При каких значениях x график функции $y = -7x^2 + 4x - 18$ расположен выше оси абсцисс?	1) при всех x; 2) только при $x = 2$; 3) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; 4) ни при каких x; 5) $(2; +\infty)$.
40.	Найти область определения функции $y = \frac{3x - 5}{\sqrt{7x - x^2 - 12}}$.	1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[3; 4]$; 3) $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$; 4) $(4; +\infty)$; 5) $(3; 4)$.
41.	Найти область определения функции $y = 2x^2 + 2x - \sqrt[6]{2 - 3x^2 + x} + \frac{5}{x}$.	1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $[-\frac{2}{3}; 0) \cup [0; +\infty)$; 3) $[-\frac{2}{3}; 0) \cup (0; 1]$; 4) $[-\frac{2}{3}; 1]$; 5) $(1; +\infty)$.
42.	Найти число, принадлежащее области определения функции $y = \sqrt{-x^2 + 16x - 64}$.	1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8; 5) 15.
43.	Найти число, принадлежащее области значений функции $y = \sqrt{-2x^2 + 20x - 50} + 15$.	1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8; 5) 15.
44.	Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 \ge 36, \\ x^2 + 28 < 11x. \end{cases}$	1) (6; 7); 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-\infty; 6]$; 4) [6; 7); 5) $(-\infty; 4]$.
45.	Решить систему неравенств $\begin{cases} -x^2 + 12x \ge 36, \\ x^2 - 9{,}5x + 19{,}5 < 0. \end{cases}$	1) (6; 6,5); 2) $x = 6$; 3) $(-\infty; 6]$; 4) [6; 6.5); 5) $(-\infty; 3]$.
46.	Найти область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2} + \frac{6}{\sqrt[4]{4x^2 + 4x + 1}}$.	1) $\left[-3; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 3\right]$; 2) $[-3; 3]$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; 3\right]$; 4) $\left[-3; -\frac{1}{2}\right)$; 5) $[3; +\infty)$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
47.	Найти область определения функции $y=\frac{\sqrt{5x-x^2-6}}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.	1) $(-\infty; 2)\cup[3; +\infty)$; 2) $[3; +\infty)$; 3) $[2; 3]$; 4) $[2; 3)$; 5) $(2; 3]$.
48.	Найти сумму целых чисел, принадлежащих области определения функции $y=\sqrt[6]{2-x}+3\sqrt{2x^2+x+6}+\frac{5}{\sqrt[12]{12-x-x^2}}$.	1) –5; 2) –3; 3) –7; 4) –6; 5) –8.
49.	Решить неравенство $f(x) > g(x)$, используя графики функций $f(x)$ и $g(x)$, изображенные на рисунке: 	1) $(-\infty; -2)\cup(1; +\infty)$; 2) $(-2; 1)$; 3) $[-2; 1]$; 4) $(-\infty; -2]\cup[1; +\infty)$; 5) $(1; +\infty)$.
50.	Решить неравенство $f(x) \geq g(x)$, используя графики функций $f(x)$ и $g(x)$, изображенные на рисунке: 	1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$; 3) –1; 4) $[-1; +\infty)$; 5) $(-1; +\infty)$.

5. Рациональные уравнения и системы уравнений

5.1. Рациональные уравнения

Основными методами решения уравнения являются:

1) приведение рационального выражения к общему знаменателю;

2) разложение на множители (группировкой; с помощью формул сокращенного умножения; с помощью разложения квадратного трехчлена на множители);

3) замена переменных;

4) использование однородности уравнения;

5) выделение целой части в каждой из дробей уравнения;

6) выделение полного квадрата суммы или разности в левой части уравнения.

Разложение на множители

Рациональное уравнение, приведенное в результате разложения на множители к виду $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$, равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0,\\ \ldots\\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$

Пример 1. Найти среднее арифметическое корней уравнения $(x-1)(x^2-2x-15)=x^2-25$.

Решение. Разложим на множители квадратный трехчлен в левой части уравнения и разность квадратов в правой части, получим: $(x-1)(x-5)(x+3)=(x-5)(x+5)$.

Перенесем слагаемое из правой части уравнения в левую и вынесем за скобку общий множитель $(x-5)$, получим: $(x-5)((x-1)(x+3)-(x+5))=0$, $(x-5)(x^2+x-8)=0$.

Последнее уравнение равносильно совокупности: $x-5=0$ или $x^2+x-8=0$.

Корнем первого уравнения является $x_1=5$. Корни второго уравнения — иррациональные числа x_2 и x_3 (так как $D>0$), сумму которых можно найти по теореме Виета $x_2+x_3=-1$. Тогда среднее арифметическое всех корней исходного уравнения равно: $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{5+(-1)}{3}=1\frac{1}{3}$.

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Метод введения новых переменных является одним из основных методов решения уравнений любого типа. Рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся замен:

1) Если в уравнении присутствуют выражения вида $f(x)$ и $(f(x))^2$, то можно выполнить замену $y=f(x)$, решить полученное квадратное уравнение, а после выполнения обратной замены найти корни исходного уравнения.

В частности, если уравнение имеет вид $ax^{2n}+bx^n+c=0$, заменой $y=x^n$ приводится к квадратному: $ay^2+by+c=0$.

2) Если в уравнении имеется выражение вида $x+\frac{1}{x}$, то можно попытаться выполнить замену: $x+\frac{1}{x}=y$, тогда

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$; $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y$.

Аналогичную замену можно выполнить и при наличии в уравнении выражений вида $x-\frac{1}{x}$, а также $ax+\frac{b}{x}$.

3) Если в уравнении имеется несколько выражений вида Ax^2+B_1x+C, Ax^2+B_2x+C и т. д., то можно попробовать разделить их на $x\neq 0$ и выполнить замену $y=Ax+\frac{C}{x}$. До деления необходимо проверить, чтобы $x=0$ не являлся корнем уравнения: если при $x=0$ уравнение обращается в верное равенство, значит $x_1=0$ — корень исходного уравнения (важно не потерять его в процессе деления!).

4) Уравнение вида $a\cdot f^2+b\cdot f\cdot g+c\cdot g^2=0$, где a, b, c — некоторые константы, называется **однородным второй степени** и решается делением обеих частей уравнения на $g^2\neq 0$, получим: $a\cdot\left(\frac{f}{g}\right)^2+b\cdot\left(\frac{f}{g}\right)+c=0$. Выполнив замену $y=\frac{f}{g}$, получим и решим квадратное уравнение, а после выполнения обратной замены найдем корни исходного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^2+\frac{9}{x^2}+x-\frac{3}{x}=8$.

Решение. Целесообразно выполнить замену $x-\frac{3}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{9}{x^2}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}+6=y^2+6$ и уравнение примет вид: $y^2+6+y=8$, $y^2+y-2=0$, найдя корни которого и выполнив обратную замену, можно получить корни исходного уравнения: $x_1=-3$, $x_2=1$, $x_3=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x_4=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: -3; $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; 1; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

5.2. Уравнения в целых числах

К этому типу относятся уравнения, в которых требуется найти все целочисленные решения либо доказать, что их нет. Как правило, количество переменных в таком уравнении — две или более.

К методам решения уравнений в целых числах можно отнести следующие:

1) разложение левой части уравнения на множители, произведение которых равняется целому числу;

2) выделение полных квадратов в левой части уравнения, сумма которых равна целому числу;

3) применение ограниченности функций, входящих в состав уравнения;

4) применение признаков делимости целых чисел.

В результате использования этих и других приемов, как правило, можно получить некоторое конечное число возможных значений переменных, входящих в состав уравнения, и найти эти значения.

5.3. Системы рациональных уравнений

Решением системы уравнений с n неизвестными называется упорядоченный набор n чисел, обращающих в верное равенство каждое из уравнений системы. Для решения системы уравнений обычно заменяют данную систему другой, равносильной исходной, которая решается проще.

Основные методы решения систем рациональных уравнений:

1) Метод подстановки.

2) Замена переменной.

3) Метод разложения на множители.

4) Метод алгебраических преобразований уравнений системы (уравнения системы можно складывать, вычитать, умножать на число, перемножать и делить, соблюдая возможность выполнения таких операций).

5) Графический метод (при решении системы двух уравнений с двумя неизвестными этим методом необходимо построить в одной системе координат графики обоих уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков).

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $(4-x)^2+(x-4)(x^2-2x-2)=0$.	1) 5; 2) 7; 3) 4; 4) –2; 5) 3.
2.	Найти произведение корней уравнения $x^3-3x^2+3x-1=(1-x)(5-3x)$.	1) –6; 2) 6; 3) 3; 4) 2; 5) –3.
3.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2-4x+4=(2-x)(x^2+3x-4)$.	1) 2; 2) –4; 3) 4; 4) –2; 5) 3.
4.	Найти произведение корней уравнения $x^2-9=(7+x)(x^2-5x+6)$.	1) –17; 2) –51; 3) 3; 4) 51; 5) 2.
5.	Найти среднее арифметическое корней уравнения $(x^2-2x-14)^2=4(x-1)^2$.	1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 16; 5) –1.
6.	Найти произведение корней уравнения $256x^8+1=32x^4$.	1) 0; 2) –4; 3) 4; 4) –0,25; 5) 2.
7.	Найти значение выражения $x_1^3\cdot x_2$, где x_1 и x_2 — наибольший и наименьший корни уравнения $x^6+6x^3-16=0$ соответственно.	1) 16; 2) –4; 3) 4; 4) –16; 5) 8.
8.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $(x^2+8x-12)^2-4x^4-4x^2-1=0$.	1) 8; 2) 10,(6); 3) –8; 4) –2,(6); 5) 5,(3).
9.	Найти произведение корней уравнения $(x^2-2x+4)^2+(x-1)^2=27$.	1) 1; 2) 10; 3) –10; 4) 16; 5) –1.
10.	Найти среднее арифметическое корней уравнения $(x-4)^4-3x^2+24x-58=0$.	1) 8; 2) –4; 3) 4; 4) –8; 5) 2.
11.	Найти значение выражения $n\cdot p$, где n — количество, а p — произведение корней уравнения $x(x-3)(x+1)(x+4)=-35$.	1) 70; 2) 165; 3) 140; 4) 10; 5) 50.
12.	Найти произведение корней уравнения $3x^4+14x^2(x-3)-5(x-3)^2=0$.	1) 45; 2) –45; 3) –10; 4) 15; 5) –15.
13.	Найти утроенное произведение корней уравнения $(x-2)^2-5(x^3-8)-6(x^2+2x+4)^2=0$.	1) 3; 2) –2; 3) –3; 4) 26; 5) 6.
14.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2+6+\frac{2}{x^2-9}=5x-\frac{4}{18-2x^2}$.	1) 2; 2) 5; 3) –3; 4) 6; 5) –2.
15.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $3x^2-10x-7+\frac{x-4}{4-x}=0$.	1) 1; 2) 4; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) –2.
16.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{x^2-8x+16}{x-4}+\frac{x^2-9}{x+3}+\frac{2x^2-5x-7}{x+1}+x^2-6=0$.	1) –2; 2) –4; 3) 4; 4) –6; 5) 0.
17.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{1-x}{x+1}-\frac{x}{1-x}=\frac{7}{1-x^2}$.	1) 0; 2) –3; 3) 4; 4) 6; 5) –2.
18.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{4}{x^2-6x+9}-\frac{6}{9-x^2}=\frac{1}{x+3}$.	1) 16; 2) –16; 3) 15; 4) –15; 5) –10.
19.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{4}{x^2-1}-\frac{9}{x^2+2x-3}+\frac{2}{x+1}=0$.	1) 0,5; 2) 1,5; 3) –1; 4) 1; 5) 3,5.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
20.	Найти произведение корней уравнения $\frac{8y}{y+1}-\frac{6}{y^2+3y+2}-\frac{9}{y+2}=0$.	1) 1,15; 2) –1,15; 3) 1,875; 4) 1,8; 5) –1,875.
21.	Найти сумму квадратов корней уравнения $\frac{28}{x^2-5x+8}-x^2=11-5x$.	1) 17; 2) 25; 3) 5; 4) 4; 5) 100.
22.	Найти произведение корней уравнения $\frac{5x+5}{x^2}-\frac{6x^2}{x+1}+13=0$.	1) 1; 2) –1,5; 3) 1,5; 4) 2,5; 5) –2,5.
23.	Найти значение выражения $S\cdot n$, где S — сумма, а n — количество натуральных корней уравнения $\frac{2x^2-2x-2}{x+1}+\frac{2x+2}{x^2-x-1}+5=0$.	1) 1; 2) –2,5; 3) 2,5; 4) –0,5; 5) 0,5.
24.	Найти значение выражения $7P-1$, где P — произведение корней уравнения $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+3\frac{x-3}{x+1}-18\left(\frac{x-3}{x}\right)^2=0$.	1) 72; 2) 66; 3) 80; 4) 17; 5) 14.
25.	Найти увеличенную в 20 раз сумму корней уравнения $\frac{x^2-14x+49}{(x+2)^2}-6\cdot\frac{x^2-10x+21}{x^2+3x+2}+5\cdot\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2=0$.	1) 0; 2) –9; 3) –4; 4) –5; 5) –2.
26.	Найти произведение корней уравнения $\frac{x^2}{x^2+4x+4}-4\frac{x}{x-1}=45\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}$.	1) 1; 2) –4,5; 3) 2,5; 4) 4,5; 5) 0,5.
27.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2-4x=\frac{32}{3-2x-x^2}$.	1) 2; 2) –2; 3) 4; 4) 6; 5) –4.
28.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x-\frac{1}{x}\right)-16=0$.	1) 1; 2) –2; 3) 5; 4) –5; 5) 7.
29.	Найти произведение корней уравнения $x^2+x+\frac{4}{x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)=16$.	1) 4; 2) 2; 3) –4; 4) –1; 5) 1.
30.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^4-15x^2-2x^3+12x+36=0$.	1) –2; 2) 2; 3) 3; 4) –1; 5) 36.
31.	Найти произведение корней уравнения $\frac{2x}{x^2-2x-3}+\frac{3x}{x^2+2x-3}=\frac{7}{8}$.	1) 1; 2) –3; 3) 9; 4) –5; 5) 7.
32.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{x^2-10x+12}{x^2-6x+12}=\frac{3x}{x^2-8x+12}$.	1) 12; 2) –12; 3) 144; 4) –21; 5) 21.
33.	Найти все пары натуральных чисел x и y такие, что верно равенство $x^2=4y^2+13$. В ответе указать сумму всех таких чисел.	1) 0; 2) 6; 3) 14; 4) 10; 5) 13.
34.	Для каждой пары целых отрицательных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2-2y-xy+2x-4=0$, вычислите сумму $x+y$, в ответе укажите наименьшую из этих сумм.	1) –17; 2) –16; 3) –14; 4) –10; 5) –11.
35.	Найти все пары натуральных чисел x и y такие, что верно равенство $x^2-8x+y^2+2y=-7$. В ответе указать сумму всех таких чисел.	1) 5; 2) 7; 3) 12; 4) 17; 5) 20.
36.	Для каждой пары целых положительных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2+2xy+2y^2-4y-22}{x^2-2xy+y^2-1}=0$, вычислите произведение xy, в ответе укажите наибольшее из этих произведений.	1) 4; 2) 6; 3) 12; 4) 16; 5) 20.
37.	Для каждой пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $(x^2+y^2)(x-2y+5)=2xy$, найдите произведение xy, в ответе укажите наименьшее из этих произведений.	1) –12; 2) –4; 3) –2; 4) –6; 5) 0.
38.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{x^2-4x+8}{x-2}-\frac{5x^2+10x+8}{5(x+1)}-\frac{5x^2-40x+92}{5(x-4)}=1-x$.	1) 6; 2) 2; 3) –2; 4) –6; 5) 8.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
39.	Сумма $x+y$ всех решений системы $\begin{cases} y-x=2, \\ x^2-3x-4y=10 \end{cases}$ равна:	1) 20; 2) 22; 3) 14; 4) 12; 5) 18.
40.	Максимальное произведение $3x \cdot y$ решений $(x; y)$ системы $\begin{cases} 2x^3+3x^2y=32, \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ равно:	1) 12; 2) 24; 3) 4; 4) 8; 5) 18.
41.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=4, \\ x^3+8y^3=8 \end{cases}$, то максимальное значение выражения x^2-y^2 равно:	1) 9; 2) 6; 3) 4; 4) 8; 5) 1.
42.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} (x-y)^2+x+4y=5, \\ 1-x=4y \end{cases}$, то значение выражения $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$ равно:	1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 1; 5) 6.
43.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} x^2+6y+9=0, \\ y^2+6x+9=0 \end{cases}$, то сумма $x+y$ равна:	1) –12; 2) 4; 3) –4; 4) 6; 5) –6.
44.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} (x-2y)^2(x+y)^3=16, \\ (x-2y)^3(x+y)^2=64 \end{cases}$, то произведение $x \cdot y$ равно:	1) 2; 2) –2; 3) –4; 4) 1; 5) 8.
45.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=18, \\ y^3x^4+x^3y^4=36 \end{cases}$, то произведение $x \cdot y$ равно:	1) 2; 2) –2; 3) –4; 4) 4,5; 5) 8.
46.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} (x-y)^2-12(x-y)+35=0, \\ (x+2y)^2-2(x+2y)-8=0 \end{cases}$, то максимальное значение выражения $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$ равно:	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.
47.	Найти количество точек пересечения графиков уравнений $x^2+y^2+2xy+x^2y^2=5$ и $x^2y+xy^2=2$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
48.	Сумма всех значений y, являющихся решениями системы $\begin{cases} x-xy-y=1, \\ x^2+y^2+2x-2y=19 \end{cases}$, равна:	1) 2; 2) –2; 3) 8; 4) 4; 5) 16.
49.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0, \\ x^2+2y^2=6 \end{cases}$, то наибольшее значение выражения $x \cdot y$ равно:	1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 6; 5) 8.
50.	Найти количество точек пересечения графиков уравнений $x^2-xy+y^2=3$ и $3x^2+xy-2y^2=12$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
51.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x^3y+y^4+x^4=48 \end{cases}$, то значение выражения x^4+y^4 при условии, что $xy<0$, равно:	1) 45; 2) 96; 3) 56; 4) 48; 5) 32.
52.	Если $(x; y)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \frac{3}{x-2y}+\frac{5}{x^2+xy}=33, \\ \frac{6}{x-2y}-\frac{4}{x^2+xy}=-18 \end{cases}$, то значение выражения $36(x^2-y^2)$ равно:	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
53.	Количество пар $(x; y)$, где $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} \frac{x}{y-2}+\frac{2y-4}{x}=3, \\ xy-3y+6=0 \end{cases}$, равно:	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
54.	Для каждой тройки целых положительных чисел x, y и z, удовлетворяющих системе $\begin{cases} x^2+2xy+5y^2-4yz+z^2=13, \\ x^2+2xy-3y^2+4yz-z^2=5 \end{cases}$, найдите значение суммы $x+y+z$. В ответе укажите большую из этих сумм.	1) 7; 2) 12; 3) 13; 4) 5; 5) 9.
55.	Если x, y и z — целые положительные числа, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \dfrac{4x^2+y^2+4xy}{(y+1)^2-4y}=4, \\ xz-5+3x-z^2-3z=0 \end{cases}$, то сумма $x+y+z$ равна:	1) 17; 2) 12; 3) 13; 4) 15; 5) 19.

6. Рациональные неравенства и их системы

Рациональное неравенство — это неравенство одного из видов: $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены. Основным методом решения таких неравенств является метод интервалов, суть которого состоит в выполнении следующих действий:

1. Все члены неравенства переносятся в левую часть и приводятся к общему знаменателю.
2. Определяются точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль.
3. Эти точки наносятся на числовую прямую, разбивая ее на интервалы, в каждом из которых рациональная функция, находящаяся в левой части неравенства, сохраняет знак. При этом нули знаменателя всегда исключаются из промежутков и изображаются выколотыми точками «○».
4. Определяется знак на крайнем справа интервале: если произведение коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя больше нуля, то соответствующая рациональная функция принимает на этом интервале положительные значения, а в противном случае — отрицательные значения.
5. Определяются знаки на остальных интервалах: при переходе через отмеченную точку знак меняется на противоположный, если она является корнем нечетной кратности (т. е. встречается нечетное число раз среди корней числителя и знаменателя); при переходе через точку четной кратности знак сохраняется.
6. Множеством решений неравенства является объединение промежутков с соответствующим знаком, при этом в случае нестрогого неравенства к этому множеству добавляются нули числителя.

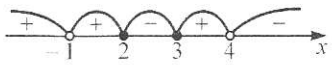
Примечание. При определении знаков функции, находящейся в левой части неравенства, вместо использования правил, описанных в п. 4, 5, можно проверять знаки функции непосредственной подстановкой в нее значений переменной из каждого промежутка.

Например. Решим неравенство $\frac{(2-x)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geq 0$.

1) Все члены неравенства находятся в левой части.

2) Найдем нули числителя: $x_1=2$, $x_2=3$. Нули знаменателя: $x_3=-1$, $x_4=4$, $x_5=-1$.

3) Изобразим точки на координатной прямой:



4) Произведение коэффициентов при старших степенях каждого множителя в числителе и знаменателе равно $-1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=-1$, значит на крайнем правом интервале ставим знак минус.

5) При переходе через точку $x=4$ знак *меняется* на противоположный, так как это корень кратности 1 (нечетной). При переходе через точку $x=3$ знак также *меняется*, так как это корень кратности 3 (нечетной). При переходе через точку $x=2$ знак *меняется*, так как это корень кратности 1. При переходе через точку $x=-1$ знак *не меняется*, так как кратность этого корня равна четному числу 2 (корень $x=-1$ встречается дважды среди корней знаменателя).

6) Решением исходного неравенства является объединение промежутков со знаком «+», включая нули числителя, так как неравенство было нестрогим.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2]\cup[3;4)$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Решением неравенства $(x-2)(x^2+x-2)\geq 0$ является множество:	1) $[-2;1]\cup[2;+\infty)$; 2) $[-2;1]$; 3) $[2;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2]\cup[1;2]$; 5) $[1;2]$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
2.	Сумма целых решений неравенства $(x^2-4x+4)(5x+1)\le 0$, удовлетворяющих условию $x>-5$, равна:	1) –10; 2) 0; 3) 1; 4) –8; 5) 3.
3.	Указать количество целых чисел, не являющихся решениями неравенства $(x-2)^3(x+1)^{-1}(6-x)\le 0$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
4.	Наибольшее целое решение неравенства $(x-5)^2(x+11)\ge(x^2-7x+10)(2x-3)$ равно:	1) 1; 2) 5; 3) 14; 4) 6; 5) 15.
5.	Найти сумму целых решений неравенства $(2x^2+7{,}5x-7)^2<(x^2+9{,}5x+1)^2$.	1) –8; 2) –5; 3) 4; 4) –6; 5) –12.
6.	Количество целых решений неравенства $x^4-10x^2+9>0$, принадлежащих отрезку $[-2;6]$, равно:	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
7.	Решением неравенства $(2x^2+3x+3)(x^2-9)\le 0$ является множество:	1) $(-\infty;-3]$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; 4) $[-3;3]$; 5) $[3;+\infty)$.
8.	Наибольшее целое решение неравенства $(4x-6-x^2)(2x^2-x-15)>0$ равно:	1) –2; 2) 0; 3)1; 4) 2; 5) 3.
9.	Найти количество целых решений неравенства $x^4-18x^2+81\le 0$.	1) 8; 2) 5; 3) 7; 4) 6; 5) 2.
10.	Найти количество целых решений неравенства $4x^4-37x^2+9\le 0$.	1) 8; 2) 5; 3) 4; 4) 6; 5) 2.
11.	Найти сумму целых решений (или решение, если оно одно) неравенства $(x^2-5x+4)^2+(x^2-7x+6)^2\le 0$.	1) 1; 2) 12; 3) 11; 4) 4; 5) 5.
12.	Количество целых решений неравенства $(x^2-2x)^2-7x^2+14x-8\ge 0$, принадлежащих отрезку $[-2;5]$, равно:	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
13.	Найти сумму целых решений неравенства $x^4+6x^3+9x^2-14(x^2+3x)+40\le 0$.	1) –6; 2) –9; 3) 3; 4) –2; 5) –3.
14.	Количество целых решений неравенства $x(x+1)^2(x+2)<12$ равно:	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
15.	Наибольшее целое решение неравенства $\frac{2x-1}{5-x}\ge 0$ равно:	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
16.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{x^2-6x+9}{5-4x-x^2}\ge 0$.	1) –7; 2) –10; 3) 0; 4) –14; 5) 6.
17.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{3}{x}>1$.	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
18.	Наибольшее целое решение неравенства $x-\frac{4}{x}<0$ равно:	1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
19.	Решением неравенства $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\ge 0$ является множество:	1) $(-\infty;-1]$; 2) $(2;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$; 4) $(-1;1)\cup(1;2]$; 5) $(-1;2]$.
20.	Количество целых решений неравенства $\frac{(1-x)(x^3-4x^2-12x)}{x^2-36}\ge 0$ равно:	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
21.	Наименьшее целое положительное решение неравенства $\frac{4}{1+x}+\frac{2}{1-x}<1$ равно:	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
22.	Наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{x+1}{x+5}-\frac{x}{1-x}<\frac{2x^2+5x}{x^2+4x-5}$ равно:	1) –2; 2) –5; 3) –1; 4) –6; 5) –4.
23.	Найдите количество целых положительных значений x, не являющихся решениями неравенства $\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}\ge 1$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
24.	Найдите количество целых значений x, принадлежащих области определения функции $y=\sqrt[8]{\frac{25-10x+x^2}{(x^2+x-12)(x-7)}}$ и удовлетворяющих условию $-3<x<9$.	1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9; 5) 10.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
25.	Найти наименьшее целое значение x, принадлежащее области определения функции $f(x)=\sqrt{\frac{16+6x-x^2}{3-x}}+\frac{4}{x+2}$.	1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 8.
26.	Сумма целых решений неравенства $\frac{2x-7}{x^2-5x+6}\geq\frac{7-2x}{x^2-10x+21}$, принадлежащих отрезку [0; 8], равна:	1) 16; 2) 14; 3) 13; 4) 15; 5) 12.
27.	Найдите сумму целых отрицательных решений неравенства $\frac{5}{2x^2+3x-2}-\frac{7}{x^2-3x-10}+\frac{x+12}{2x^2-11x+5}\geq 0$.	1) –1; 2) –6; 3) –4; 4) –7; 5) –8.
28.	Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{4x^4-30x^2+2}{2x-x^2+15}\geq\frac{7-7x^2}{(x+3)(x-5)}$.	1) 12; 2) 6; 3) 5; 4) 7; 5) 8.
29.	Количество целых решений системы неравенств $\begin{cases}\frac{x+3}{2-x-x^2}>0,\\(\sqrt{7}-3)(x+1,5)\leq 0\end{cases}$ равно:	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.
30.	Сумма целых решений системы неравенств $\begin{cases}\frac{-4-x}{x^2+x}\leq\frac{9}{4x+3x^2-x^3},\\\frac{5}{x}>1\end{cases}$ равна:	1) 8; 2) 7; 3) 6; 4) 9; 5) 10.
31.	Сумма целых решений (или целое решение, если оно одно) системы неравенств $\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2+x+1}\geq\frac{3x-1}{x^3-1},\\9>x^2,\\(x-2)\leq(x-2)(x+1)\end{cases}$ равна:	1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 10; 5) 12.
32.	Наименьшее целое решение неравенства $\frac{2}{3-x}<\frac{4}{x}<\frac{x-2}{x+4}$ равно:	1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9; 5) 10.

7. Текстовые задачи

Все текстовые задачи можно условно разбить на типы: а) задачи на проценты; б) на движение; в) на работу; г) на концентрацию смесей и сплавов; д) на числовые зависимости и т. д.

Схема решения текстовой задачи, как правило, состоит из следующих этапов:

1. Выбор неизвестных (как правило, это те величины, которые требуется найти в условии задачи).
2. Составление уравнений или систем уравнений, а иногда и систем неравенств.
3. Нахождение неизвестных или некоторой их комбинации.
4. Отбор решений, подходящих по смыслу задачи.

7.1. Задачи на проценты

Понятие процента и основные приемы работы с ними перечислены в п. 1. При решении текстовых задач на проценты полезно иметь на вооружении следующие правила:

- При многократном повышении (или понижении) величины каждое следующее повышение (или понижение) вычисляется от предыдущей полученной величины, а не от первоначальной.
- Если первоначальный и конечный размеры изменяемой величины не указаны, удобно взять ее за 100.
- Если число A увеличить на $p\,\%$, то получим новое значение, равное $A\left(1+\frac{p}{100}\right)$, а при уменьшении на $p\,\%$ его значение будет равно $A\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

7.2. Задачи на движение

Основными величинами при решении задач на движение являются: *расстояние*, *скорость* и *время* (как правило, в школьном курсе математики имеют дело с равномерным движением), связь между которыми выражается формулой $S = v \cdot t$.

При движении, которому «помогает» или «мешает» посторонний движущийся объект (течение реки или движение эскалатора), необходимо учитывать и скорость движения данного объекта: при движении по течению скорость движения катера равна $v = v_c + v_t$, а при движении по реке против течения — $v = v_c - v_t$, где v_c — собственная скорость катера, а v_t — скорость течения реки.

При движении друг навстречу другу скорость сближения равна сумме скоростей движения каждого из движущихся объектов. Если один объект догоняет второй, то скорость, с которой он это делает, равна разности их скоростей (от большей вычитают меньшую).

При движении по окружности необходимо понимать, что если одно тело через некоторое время догоняет второе, то за период между их встречами первое тело проходит ровно на один круг больше, чем второе.

7.3. Задачи на работу

Основными величинами при решении таких задач являются: объем выполняемой работы, производительность труда (другими словами, скорость работы), время выполнения работы. Все эти величины связаны соотношением: $A = p \cdot t$, где A — объем работы, p — производительность, t — время. Если объем работы неизвестен, то его часто принимают за 1.

В задачах на совместную работу (когда одной и той же работой занято объектов одновременно) производительности всех работающих объектов складываются.

7.4. Задачи на концентрацию смесей и сплавов

Под концентрацией вещества в растворе (смеси, сплаве) понимают отношение количества данного вещества к количеству всего раствора (смеси, сплава): $c = \frac{m}{M}$. Часто концентрацию выражают в процентах, тогда она равна данному отношению, умноженному на 100 %: $c\,\% = \frac{m}{M} \cdot 100\,\%$.

Если в условии задачи сказано, что растворы одного и того же вещества массами m_1 и m_2 с концентрациями c_1 и c_2 слили вместе (или два сплава сплавили вместе), то концентрация данного вещества в новом растворе (сплаве) будет равна $c = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2}$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Известно, что сумма квадратов двух натуральных чисел равна 117, а одно из чисел в 1,5 раза больше второго. Найдите большее из этих чисел.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.
2.	Первое число составляет 18 % второго, а третье относится к первому как 2 : 3. Сумма трех чисел равна 65. Найдите первое число.	1) 4; 2) 9; 3) 50; 4) 6; 5) 7.
3.	Если поменять местами цифры некоторого двузначного числа, то вновь полученное число будет больше исходного на 45. Найдите исходное число, если известно, что сумма квадратов его цифр равна 97. В ответ запишите сумму его цифр.	1) 13; 2) 9; 3) 14; 4) 15; 5) 16.
4.	О некотором трехзначном числе известно, что число его десятков на 3 больше числа сотен, а произведение числа десятков и единиц равно 30. Если поменять местами первую и последнюю цифры числа, то получится число, превышающее исходное на 396. Найдите корень квадратный из исходного числа.	1) 13; 2) 17; 3) 14; 4) 15; 5) 16.
5.	Найдите натуральное число, которое при делении с остатком на 6 дает неполное частное на 2 больше остатка, если известно, что остаток от деления при этом в 13 раз меньше самого числа. В ответе укажите сумму цифр числа.	1) 10; 2) 8; 3) 12; 4) 13; 5) 14.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
6.	Сумма четырех натуральных чисел равна 95. Первое число при делении на второе дает в частном 2 и в остатке 1. Второе при делении на третье дает в частном 4 и в остатке 4; третье при делении на четвертое — в частном 1 и в остатке 2. Найдите первое число.	1) 4; 2) 6; 3) 64; 4) 57; 5) 28.
7.	Средний балл Антона за 1 четверть составил 6,0. В результате напряженной работы во 2-й четверти его средний балл вырос до 6,6. На сколько процентов выросла успеваемость Антона во 2-й четверти по сравнению с первой?	1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 10; 5) 11.
8.	После подорожания на 25 % пакет молока стал стоить 15 рублей. Сколько рублей стоил пакет молока до подорожания?	1) 10; 2) 11; 3) 12; 4) 13; 5) 13,5.
9.	Мама дала Мише на карманные расходы 50000 рублей. После покупки новой книги для себя и музыкального диска в подарок другу. Миша насчитал у себя 19 % от первоначальной суммы. Сколько стоил подарок другу, если известно, что отношение цены книги к цене диска равно 17 : 10?	1) 10000; 2) 25500; 3) 12500; 4) 15000; 5) 11500.
10.	Из 120 покупателей автосалона 35 % приобрели французские автомобили. Из них 7 человек купили машины марки «Рено». Сколько процентов составляют покупатели автомобилей марки «Рено» от количества покупателей французских автомобилей?	1) $16\frac{2}{3}$; 2) 16; 3) 13; 4) 14; 5) 18.
11.	При опросе автолюбителей 37,5 % опрошенных ответили, что предпочитают ездить на машинах французских марок, 12,5 % — на машинах японских марок. Из числа всех остальных автолюбителей 80 % предпочитают немецкие автомобили, а оставшиеся 24 человека отдали предпочтение российским производителям. Сколько человек было опрошено?	1) 480; 2) 280; 3) 270; 4) 320; 5) 240.
12.	Для поездки на работу папе пришлось выбирать наиболее экономичный маршрут. Он подсчитал, что при поездке по одной дороге он расходует на 12 % денег больше, а при поездке по другой — в 1,2 раза больше, чем при поездке на общественном транспорте. Сколько денег (в рублях) тратит папа, добираясь на работу на общественном транспорте, если разница между стоимостью его поездки по двум различным дорогам на автомобиле составляет 192 рубля?	1) 1000; 2) 2500; 3) 1200; 4) 2400; 5) 3200.
13.	В результате внедрения новых технологий производительность труда на заводе в январе выросла на 10 % по сравнению с прошлогодней, а в феврале — на 5 % по сравнению с январской. На сколько процентов выросла производительность труда на заводе в феврале по сравнению с прошлогодней?	1) 17; 2) 16; 3) 14,5; 4) 15; 5) 15,5.
14.	В период предновогодней распродажи товар уценили сначала на 16 %, а через некоторое время еще на 15 %, в результате чего стоимость товара составила 357 тысяч рублей. Сколько тысяч рублей составляла первоначальная стоимость товара?	1) 560; 2) 500; 3) 480; 4) 520; 5) 420.
15.	Концентрация соли в 5 л раствора была равна 16 %. Какой станет концентрация соли (в процентах), если в раствор добавить 3 л воды?	1) 10; 2) 8; 3) 12; 4) 13; 5) 14.
16.	Слили вместе 4 л 5 %-ного и 6 л 10 %-ного растворов кислоты. Какова концентрация (в процентах) кислоты в новом растворе?	1) 6; 2) 7; 3) 7,5; 4) 8; 5) 9.
17.	Два раствора кислоты одинаковой массы с различной концентрацией кислоты слили вместе и получили 12 %-ный раствор кислоты. Если слить половину массы одного раствора и весь второй раствор, то получится 9 %-ный раствор кислоты. Найдите концентрацию (в процентах) второго раствора.	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.
18.	Кусок, содержащий серебро и никель в отношении 1 : 4, сплавили с куском серебра массой 50 г. При этом получился сплав, содержащий серебро и никель в отношении 9 : 16. Какова была масса первого сплава в граммах?	1) 180; 2) 240; 3) 190; 4) 200; 5) 225.
19.	Имеется два сплава меди и цинка различной массы. В первом сплаве отношение этих металлов равно 5 : 6, а во втором — 2 : 3. После того как их сплавили вместе, получился новый сплав массой 240 г с отношением меди и цинка 17 : 23. Какова была масса второго сплава?	1) 100; 2) 110; 3) 120; 4) 125; 5) 130.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
20.	Смесь содержит элементы типов A, B и C в отношении 2 : 3 : 7. Если бы смесь той же массы содержала те же элементы в отношении 3 : 4 : 8, то масса одного из элементов уменьшилась бы по сравнению с первоначальной на 60 г. Найдите массу смеси в килограммах.	1) 1,2; 2) 1,3; 3) 1,4; 4) 1,5; 5) 1,6.
21.	Два автомобиля выехали одновременно друг навстречу другу из населенных пунктов, расстояние между которыми равно 120 км. Известно, что один из автомобилей движется со скоростью 75 км/ч, а встреча автомобилей в пути произошла через 45 минут после начала движения. Найдите скорость (в км/ч) второго автомобиля.	1) 100; 2) 95; 3) 85; 4) 82; 5) 80.
22.	1-й велосипедист находится в пункте A, а 2-й — в пункте B на расстоянии 20 км друг от друга и одновременно начинают движение в одном направлении, причем скорость 1-го на 10 км/ч больше скорости 2-го. Известно, что 1-й велосипедист догнал второго в 45 километрах от пункта B. Найдите скорость (в км/ч) 2-го велосипедиста.	1) 10; 2) 15; 3) 17,5; 4) 22,5; 5) 25.
23.	Товарный поезд проходит мост длиной 300 м за 50 с, а туннель длиной 600 м — за 1 мин 10 с. Найдите длину поезда в метрах.	1) 560; 2) 500; 3) 450; 4) 520; 5) 420.
24.	Скорый поезд проходит мост длиной 300 м за 24 с, а мимо стоящего стрелочника — за 12 с. Найдите скорость поезда (в км/ч).	1) 90; 2) 100; 3) 95; 4) 85; 5) 80.
25.	Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 42 км, вышли навстречу друг другу два пешехода и встретились в некоторый момент времени. Если бы они оба шли с одинаковой скоростью, равной скорости 2-го пешехода, то их встреча произошла бы на 30 минут раньше. Если бы они оба шли со скоростью, равной скорости 1-го пешехода, то их встреча произошла бы на 42 минуты позже. Найдите скорость (в км/ч) 1-го пешехода.	1) 9; 2) 8; 3) 7; 4) 6; 5) 5.
26.	Из пунктов A и B выехали навстречу друг другу два автомобиля и встретились в тот момент, когда 2-й автомобиль проехал $\frac{1}{3}$ расстояния от A до B. Если бы скорость 2-го автомобиля была на 10 км/ч больше, а 1-го — на 10 км/ч меньше первоначальной, то в момент встречи 2-й автомобиль проехал бы $\frac{5}{12}$ всего пути от A до B. Найдите скорость (в км/ч) 1-го автомобиля.	1) 75; 2) 95; 3) 90; 4) 85; 5) 80.
27.	Теплоход затратил на прохождение пути в 90 км вниз по течению реки, скорость которого равна 5 км/ч, 3 часа. За сколько часов он пройдет тот же путь, двигаясь против течения с такой же собственной скоростью?	1) 3; 2) 4; 3) 3,5; 4) 4,5; 5) 4,8.
28.	Собственная скорость катера равна 46 км/ч. Найдите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что на весь путь от A до B и обратно катер затратил 5 ч 45 мин, а расстояние между пунктами A и B по реке равно 132 км.	1) 3; 2) 2; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 1,8.
29.	Из пункта A со скоростью 42 км/ч выехал мотоциклист, а через 40 минут в том же направлении из пункта A выехал автомобиль со скоростью 80 км/ч. Через какое время (в минутах) после выезда автомобиля расстояние между ними составит 67 км?	1) 160; 2) 100; 3) 150; 4) 180; 5) 120.
30.	Два велосипедиста двигаются по кругу в одном направлении: 1-й со скоростью 400 м/мин, 2-й — со скоростью 300 м/мин, встречаясь каждые 15 минут. Найдите длину окружности стадиона в метрах.	1) 1200; 2) 1500; 3) 1600; 4) 1800; 5) 2000.
31.	Две точки движутся в одном и том же направлении по кругу радиусом $120 \cdot \pi^{-1}$ м, причем 2-я точка догоняет 1-ю каждые 3 минуты. Если они начнут двигаться одновременно из одной и той же точки навстречу друг другу, то их встреча произойдет через 1,5 минуты после начала движения. Найдите скорость (в м/мин) 1-й точки.	1) 55; 2) 50; 3) 45; 4) 40; 5) 35.
32.	Возраст дочери в 3 раза меньше возраста матери, а через 7 лет мать будет старше дочери в 2,3 раза. Сколько лет матери сейчас?	1) 33; 2) 35; 3) 36; 4) 39; 5) 42.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
33.	Согласно завещанию отца, трое сыновей должны были получить такое количество акций прибыльного предприятия, которое равно полному количеству лет каждого из них. Известно, что средний сын получил акций в 1,25 раз больше, чем младший, и в 1,08 раз меньше, чем старший сын. При этом возраст каждого из них не превышал 28 лет, а количество всех разделенных акций составило не менее 70. Найдите возраст среднего сына (количество полных лет).	1) 25; 2) 24; 3) 23; 4) 22; 5) 26.
34.	В пункте отправления поезда в каждом из его вагонов было одинаковое количество пассажиров, которое превышало количество вагонов в 1,75 раза. Общее количество пассажиров поезда не превышало 450 человек. На одной из станций из 5 вагонов вышло по 4 человека, и общее количество пассажиров стало равным не менее 420 человек. Найдите количество вагонов поезда.	1) 12; 2) 13; 3) 14; 4) 15; 5) 16.
35.	Рабочий должен был изготовить 360 деталей за определенный срок, но так как рабочий перевыполнял дневную норму на 20 деталей, то выполнил всю работу на 1,5 дня раньше срока. Сколько деталей изготавливал рабочий в день?	1) 55; 2) 60; 3) 65; 4) 70; 5) 80.
36.	Бригада каменщиков должна была выложить стену в строящемся доме за определенный срок. Выполнив $\frac{2}{5}$ всей работы, бригада вынуждена была остановить работу по причине нехватки кирпича. После двух дней вынужденного простоя каменщики возобновили работу и, увеличив дневной объем работы на 20 % по сравнению с первоначальным, справились с работой с отставанием от графика на 1 день. За сколько дней должна была справиться с работой бригада?	1) 10; 2) 12; 3) 9; 4) 7; 5) 8.
37.	Двое рабочих, работая вместе 36 минут, выполнили $\frac{1}{4}$ часть работы. Затем 2-й рабочий был переведен в другой цех, и первый рабочий закончил выполнение всей работы за 4,5 часа. Сколько часов понадобится для выполнения всей работы 2-му рабочему?	1) 3; 2) 4; 3) 3,5; 4) 4,5; 5) 5.
38.	Для наполнения бассейна водой используют два крана. Если открыть их одновременно, то бассейн заполнится за $2\frac{2}{9}$ часа. За сколько часов заполнит бассейн 2-й кран, работая отдельно, если 1-й кран заполняет бассейн за 5 часов?	1) 3; 2) 4; 3) 3,5; 4) 4,5; 5) 5.
39.	Резервуар заполняется водой через три трубы. Через 1-ю трубу резервуар заполняется на 4 часа медленнее, чем через 3-ю, и на 9 часов медленнее, чем через 2-ю. Известно также, что пропускная способность 3-й трубы в 1,5 раза больше пропускной способности 1-й трубы и на 6 м^3/ч меньше пропускной способности 2-й трубы. Найдите пропускную способность (в м^3/ч) 2-й трубы.	1) 8,4; 2) 28,8; 3) 9,6; 4) 14,4; 5) 12,6.

8. Иррациональные уравнения и их системы

Иррациональные уравнения — это уравнения, содержащие переменную под знаком корня. Таким образом, уравнение $x^2+2\sqrt{3x}-3=0$ не является иррациональным, а уравнение $2x-3\sqrt[4]{x^2-1}=1$ — иррациональное.

Основными методами решения иррациональных уравнений являются:

1) возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) введение новых переменных;

3) разложение на множители;

4) умножение обеих частей уравнения или числителя и знаменателя дроби, входящей в состав уравнения, на выражение, сопряженное данному иррациональному;

5) сведение иррационального уравнения к уравнению, содержащему модуль;

6) функциональные методы решения: использование монотонности, ограниченности, нахождение области определения функций, входящих в состав уравнения.

Рассмотрим некоторые из данных методов решения подробнее.

Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень

При использовании этого метода необходимо помнить о том, что при возведении обеих частей уравнения в четную степень мы приходим к уравнению-следствию, которое может содержать посторонние корни. Неотъемлимой частью такого решения является *проверка* подстановкой полученных значений переменной в исходное уравнение.

Другой способ избавления от посторонних корней — это использование равносильных переходов, которые позволяют не опасаться как потери корней, так и появления посторонних решений. К примеру, уравнение вида $\sqrt{A(x)} = B(x)$ равносильно системе: $\begin{cases} A(x) = B^2(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$ Неравенство $B(x) \geq 0$ этой системы отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

Введение новых переменных

Суть метода состоит в том, что он позволяет свести иррациональное уравнение к алгебраическому, алгоритм решения которого известен.

Пример 1. Решить уравнение $2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[6]{x+1} = 3$.

Решение. Обозначим $y = \sqrt[6]{x+1}$ $(y \geq 0)$. Получим квадратное уравнение: $2y^2 + y - 3 = 0$, корни которого равны: $y_1 = -\frac{3}{2}$, $y^2 = 1$. Значение $y_1 = -\frac{3}{2}$ не удовлетворяет условию $y \geq 0$. Выполним обратную замену: $\sqrt[6]{x+1} = 1$. Возведем обе части полученного уравнения в шестую степень и получим значение $x = 0$, которое является корнем исходного уравнения (проверка не нужна, так как все преобразования были равносильными).

Ответ: 0.

Пример 2. Решить уравнение $2x^2 + 54x - 270 - 21x\sqrt{x-5} = 0$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде $2x^2 - 21x\sqrt{x-5} + 54(x-5) = 0$. По виду это однородное уравнение второй степени относительно выражений x и $\sqrt{x-5}$. Поэтому, выполнив деление обеих частей уравнения на выражение $(\sqrt{x-5})^2 = x-5$ (деление возможно, так как число 5 не является корнем исходного уравнения и можно считать, что $\sqrt{x-5} \neq 0$), получим уравнение: $2\left(\frac{x}{\sqrt{x-5}}\right)^2 - 21\frac{x}{\sqrt{x-5}} + 54 = 0$. Выполним замену $y = \frac{x}{\sqrt{x-5}}$ и решим квадратное уравнение $2y^2 - 21y + 54 = 0$. Получим $y_1 = 6$, $y_2 = 4{,}5$. В результате выполнения обратной замены получим совокупность: $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{x-5}} = 6, \\ \frac{x}{\sqrt{x-5}} = 4{,}5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 36(x-5), \\ x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 20{,}25(x-5), \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$. Решив ее, получим $x_1 = 9$, $x_2 = 11{,}25$, $x_3 = 6$, $x_4 = 30$.

Ответ: 6; 9; 11,25; 30.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

Решение. Введем новые переменные: пусть $\sqrt[3]{2-x} = y$, $\sqrt{x-1} = z$ $(z \geq 0)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 1, \\ y^3 + z^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - z, \\ (1-z)^3 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы: $1 - 3z + 3z^2 - z^3 = 1$, $z^3 - 4z^2 + 3z = 0$, откуда $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 3$. Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0, \\ \sqrt{x-1} = 1, \\ \sqrt{x-1} = 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2; 10.

Разложение на множители

При решении иррациональных уравнений данным методом необходимо знать и применять *правило*: произведение нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Пример 4. Решить уравнение $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

Решение. Выполним перенос слагаемого в левую часть и разложим полученное выражение на множители: $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}-2(x-3)=0$, $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$, что равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-5x+4}-2=0,\\ \begin{cases}x-3=0,\\ x^2-5x+4\geq 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2-5x+4=4,\\ \begin{cases}x=3,\\ x\in(-\infty;\,1]\cup[4;\,+\infty);\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=5.\end{array}\right.$$

Ответ: 0; 5.

Умножение на выражение, сопряженное иррациональному

Данный метод решения основан на использовании формулы $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ и позволяет избавиться от иррациональности в одной из частей уравнения. Дальнейший ход решения, как правило, предполагает разложение полученного уравнения на множители. Зачастую эффективным является прием объединения полученного уравнения в систему с исходным.

Проверка при решении уравнений такого типа **необходима**, так как при домножении обеих частей уравнения на сопряженное выражение, оно могло приобрести посторонние корни, являющиеся нулями данного выражения.

Сведение иррационального уравнения к уравнению, содержащему модуль

Часто при решении иррациональных уравнений можно избавиться от знака корня четной степени и получить уравнение, содержащее знак модуля. Например, при решении уравнения $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=6$ выделим в подкоренных выражениях полные квадраты и получим: $|x+3|+|x-3|=6$. Полученное уравнение можно решить методом интервалов или с использованием свойств модуля.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Какие из уравнений: а) $\sqrt[4]{x+4}=0$; б) $\sqrt[7]{x-2}=-3$; в) $\sqrt[8]{1-2x}=-\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5x}=4$; д) $\sqrt[5]{x+11}=1$ имеют корни?	1) а, г, д; 2) б, г, д; 3) а, б, г, д; 4) г, д; 5) а, б, в, г, д.
2.	Какие из уравнений: а) $\sqrt[12]{5x+6}=2$; б) $\sqrt[9]{7-4x}=-17$; в) $\sqrt[6]{x}=-x^2-1$; г) $\sqrt[5]{6x+7}+8=0$; д) $\sqrt[10]{3x+5}+3=0$ не имеют корней?	1) б, г, д; 2) б, в, д; 3) а, б, г, д; 4) в, д; 5) б, в, г, д.
3.	Найти корни уравнения $\frac{2x^2-4x}{\sqrt{1-x}}=0$.	1) $x=1$; 2) $x=0$; 3) $x=0$, $x=2$; 4) $x=0$, $x=1$, $x=2$; 5) нет корней.
4.	Найти корни уравнения $\frac{x^2+x-6}{\sqrt{4-x^2}}=0$.	1) $x=2$; 2) $x=-3$; 3) $x=-3$, $x=2$; 4) $x=-2$, $x=2$; 5) нет корней.
5.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2-4(\sqrt{x})^2-12=0$.	1) 6; 2) 36; 3) 4; 4) –2; 5) 40.
6.	Найти произведение корней уравнения $3x^2-8\sqrt{x^2}-3=0$.	1) –1; 2) –9; 3) 3; 4) 9; 5) 27.
7.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[4]{x^2-2x-8}=2$.	1) 6; 2) –2; 3) 2; 4) –4; 5) 24.
8.	Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[7]{x^3-x^2-2x-1}=-1$.	1) 0,5; 2) –0,5; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1.
9.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x+30}=x$.	1) –5; 2) 5; 3) 6; 4) 30; 5) –30.
10.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{7x+8}=-x$.	1) –8; 2) 8; 3) –7; 4) 7; 5) – 1.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
11.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{15-\sqrt[3]{x-8}}=2\sqrt{3}$.	1) 19; 2) 17; 3) 35; 4) 1; 5) 21.
12.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{x+1}}=-1$.	1) 256; 2) 257; 3) 15; 4) 255; 5) 210.
13.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^2+\sqrt{5-4x}}=x-1$.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2; 5) нет корней.
14.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^2+1-\sqrt{4x^2-x^4+16}}=-x-1$.	1) 2; 2) –2; 3) 0; 4) –4; 5) нет корней.
15.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[4]{x^3+12x}=\sqrt[4]{6x^2+8}$.	1) 2; 2) –2; 3) 0; 4) –4; 5) нет корней.
16.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{20-x^2}=\sqrt{-8x}$.	1) 8; 2) –2; 3) 10; 4) –8; 5) –10.
17.	Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}=x$.	1) 0,25; 2) –0,25; 3) 0; 4) 0,5; 5) 1.
18.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3x+1}=x+3$.	1) 4; 2) –1; 3) 1; 4) –5; 5) 5.
19.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[4]{x^2-2x}+\sqrt{x^2-2x}-2=0$.	1) 2; 2) –2; 3) 1; 4) –1; 5) $1+\sqrt{2}$.
20.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$.	1) 0; 2) –1; 3) 7; 4) –7; 5) –49.
21.	Найти произведение большего корня на количество корней уравнения $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=\frac{5}{2}$.	1) 4; 2) –4; 3) 5; 4) –5; 5) 6.
22.	Найти среднее арифметическое корней уравнения $x^2+3x-6\sqrt{x^2+3x+24}+8=0$.	1) 8; 2) –8; 3) 5; 4) –5; 5) –1,5.
23.	Найти сумму различных корней (или корень, если он один) уравнения $x^2-4x-\sqrt{2x^2-8x+12}+6=0$.	1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) –8; 5) –4.
24.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-3}$.	1) 3; 2) –2; 3) 5; 4) –5; 5) –3.
25.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}=x$.	1) 2; 2) 4; 3) –2; 4) 0; 5) –4.
26.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $\sqrt{4-x^2}(x^2-6x+5)=0$.	1) 3; 2) 4; 3) –8; 4) 2; 5) –6.
27.	Найти среднее арифметическое корней уравнения $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$.	1) 1,5; 2) 0,5; 3) $-\frac{5}{3}$; 4) $\frac{5}{3}$; 5) 1.
28.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $\sqrt{2x^2-2x-8}(2x+7)+2x^2+7x=0$.	1) –3,5; 2) –2; 3) –7; 4) 2; 5) –14.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
29.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{3-11x}-4x+\frac{4x^2}{\sqrt{3-11x}}=0$.	1) –3; 2) 0,25; 3) –2,75; 4) 2,75; 5) –0,25.
30.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[4]{9+4x^2-12x}+\sqrt{2x-3}=14$.	1) 24; 2) 14; 3) 28; 4) 13; 5) 26.
31.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{6x-x^2}+\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt{6-x}=2\sqrt{5}$.	1) –5; 2) 6; 3) 5; 4) 1; 5) –6.
32.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{7x+x^2}+\sqrt[4]{x^2+14x+49}\cdot\sqrt{-x}=4\sqrt{2}$.	1) –8; 2) 1; 3) 8; 4) –7; 5) 7.
33.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^2-5x+3}-\sqrt{x^2-12x+3}=x$.	1) –1; 2) 1; 3) $11\frac{1}{3}$; 4) $12\frac{1}{3}$; 5) 0.
34.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $\frac{\sqrt{18-3x}-\sqrt{18+3x}}{\sqrt{18-3x}+\sqrt{18+3x}}=-\frac{6}{x}$.	1) –24; 2) 0; 3) 8; 4) –12; 5) 12.
35.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{(x-2)(x-4)}-2\sqrt{4-x}-\sqrt[4]{x^2-4x+4}+2=0$.	1) –2; 2) 1; 3) 5; 4) –6; 5) 3.
36.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x-3}+4)=x$.	1) –1; 2) 1; 3) $\frac{47}{16}$; 4) $\frac{57}{16}$; 5) 0.
37.	Найти сумму целых решений уравнения $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{4x^2+12x+9}=x+6$.	1) 8; 2) 3; 3) 5; 4) 7; 5) 6.
38.	Найти сумму корней уравнения $\sqrt{x^4-6x^3+9x^2}=2$.	1) –6; 2) 3; 3) 5; 4) –3; 5) 6.
39.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-12}=1$.	1) 18; 2) 23; 3) 5; 4) 20; 5) –15.
40.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.	1) 3; 2) 12; 3) 13; 4) 11; 5) 12.
41.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ yx=36\end{cases}$, то сумма $x+y$ равна:	1) 26; 2) 14; 3) 13; 4) 20; 5) 12.
42.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2,\\ x-y=16\end{cases}$, то сумма $x+y$ равна:	1) 34; 2) 25; 3) 43; 4) 40; 5) 42.
43.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8\end{cases}$, то разность $x-y$ равна:	1) 8; 2) 1; 3) 5; 4) 2; 5) –1.
44.	Максимальное произведение $x\cdot y$ решений $(x; y)$ системы $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8\end{cases}$ равно:	1) 134; 2) 252; 3) 432; 4) 48; 5) 42.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
45.	Сумма всех значений y, являющихся решениями системы $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\\ x+y=5\end{cases}$, равна:	1) 8; 2) 1; 3) 5; 4) 4; 5) 2.
46.	Найдите значение выражения $n\cdot y_0$, где n — количество пар решений системы, а y_0 — наибольшее значение y из возможных решений $(x; y)$ системы уравнений $\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\frac{x}{y+1}}=1,\\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5.\end{cases}$	1) 54; 2) 24; 3) 32; 4) 10,25; 5) 21.
47.	Найдите произведение $x\cdot y$, где $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}x+y+\sqrt{x+y}=20,\\ x^2+y^2=136.\end{cases}$	1) 60; 2) 27; 3) 54; 4) 48; 5) 28.
48.	Сумма всех значений y, являющихся решениями системы $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3\end{cases}$, равна:	1) 12; 2) 9; 3) 8; 4) 3; 5) 1.
49.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}3\sqrt[3]{xy}-2\sqrt{xy}=1,\\ x^2+y^2-x-y+3xy=3\end{cases}$, то сумма $x+y$ равна:	1) 16; 2) 8; 3) 6; 4) 2; 5) 1.
50.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y}=4\sqrt{xy},\\ 4y+x=2\end{cases}$, то разность $x-y$ равна:	1) –0,75; 2) 1,25; 3) 0,75; 4) –0,25; 5) –1.
51.	Если $(x; y; z)$ — решение системы $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3,\\ \sqrt{y+z}+\sqrt{x+z}=5,\\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4\end{cases}$, то сумма $x+y+z$ равна:	1) 11; 2) 7; 3) 9; 4) 4; 5) 5.

9. Иррациональные неравенства

Основные методы решения иррациональных неравенств:

1) выполнение равносильных переходов, основанных на определении корня n-й степени;

2) обобщенный метод интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt[7]{2x-5}>-1$.

С учетом свойств корня нечетной степени исходное неравенство равносильно неравенству $2x-5>(-1)^7$, откуда $2x>4$, т. е. $x>2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt[8]{1-x^2}>-\sqrt[8]{8}$.

По определению арифметического корня четной степени, значения выражения $\sqrt[8]{1-x^2}$ неотрицательны при всех значениях x, при которых это выражение имеет смысл, т. е. при условии, что $1-x^2\geq 0$, значит при $x\in[-1; 1]$. В правой части находится отрицательное число, а значит, исходное неравенство верно на всей области определения, т. е. при $x\in[-1; 1]$.

Ответ: $[-1; 1]$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{5x+1} \le \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+6}$.

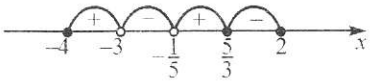
Перенесем слагаемые в левую часть и разложим полученное выражение на множители, получим неравенство: $\sqrt{8-2x-x^2}\left(\frac{1}{5x+1}-\frac{1}{2x+6}\right)\le 0$, или $\sqrt{8-2x-x^2}\,\frac{-3x+5}{(5x+1)(2x+6)}\le 0$.

1 способ. Последнее неравенство равносильно совокупности: $\left[\begin{cases} 8-2x-x^2\ge 0, \\ \frac{5-3x}{(5x+1)(2x+6)}\le 0; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x\in[-4;2], \\ x\in\left(-3;-\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right); \end{cases} \right.$

$\left.\begin{cases} 8-2x-x^2=0, \\ (5x+1)(2x+6)\ne 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x=-4 \end{cases} \right.$,

решением которой является множество: $x\in\{-4\}\cup\left(-3;\ -\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{5}{3};\ 2\right]$.

2 способ. Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\sqrt{8-2x-x^2}(5-3x)}{(5x+1)(2x+6)}$. Ее область определения найдем в результате решения системы неравенств: $\begin{cases} 8-2x-x^2\ge 0, \\ (5x+1)(2x+6)\ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\le x\le 2, \\ x\ne -\frac{1}{5}, x\ne -3 \end{cases}$. Итак, область определения $D(f)=[-4;\ -3)\cup(-3;\ -\frac{1}{5})\cup(-\frac{1}{5};\ 2]$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Нули функции: $x=\frac{5}{3}$, $x=-4$, $x=2$ разбивают область определения на промежутки, на которых функция $f(x)$ сохраняет знак. Подставим значения x из каждого промежутка и определим знаки функции $f(x)$ на каждом из них.



Итак, $f(x)\le 0$ при $x\in\{-4\}\cup\left(-3;\ -\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{5}{3};\ 2\right]$.

Ответ: $x\in\{-4\}\cup\left(-3;\ -\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{5}{3};\ 2\right]$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Решением неравенства $\sqrt[6]{2x-x^2}>0$ является множество:	1) (0; 2); 2) [0; 2]; 3) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; 4) R; 5) $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.
2.	Решением неравенства $\sqrt{16-x^2}>-\sqrt{2}$ является множество:	1) (–4; 4); 2) [–4; 4]; 3) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$; 4) R; 5) $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$
3.	Решением неравенства $\sqrt[8]{3x-x^2}\le 0$ является множество:	1) (0; 3); 2) [0; 3]; 3) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$; 4) R; 5) $x=0$; $x=3$.
4.	Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt{-x^2-7x}>\sqrt{10}$.	1) –7; 2) –14; 3) –12; 4) –9; 5) –5.
5.	Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt{x^2+8x}\le 3$.	1) –17; 2) –16; 3) 1; 4) –9; 5) –18.
6.	Найти количество целых решений неравенства $\sqrt[3]{x^4-2x^2-7}>1$, удовлетворяющих условию $x\in[-5;6]$.	1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 6; 5) 7.
7.	Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt[5]{2-x^3}<-\sqrt[5]{6}$, не превосходящих 7.	1) 18; 2) 20; 3) 23; 4) 25; 5) 27.
8.	Найти количество целых решений неравенства $(x+6)\sqrt{x^2-12}\ge 0$, удовлетворяющих условию $\lvert x\rvert<6$.	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
9.	Решением неравенства $\sqrt[5]{12x-x^2}\cdot\sqrt[6]{x+1}<0$ является множество:	1) $(12;+\infty)$; 2) $(0;12)$; 3) $(-\infty;0)\cup[12;+\infty)$; 4) R; 5) $(-1;0)\cup(12;+\infty)$.
10.	Найти количество целых решений неравенства $4x\cdot\sqrt[4]{2-x-x^2}\le x^2\cdot\sqrt[4]{2-x-x^2}$.	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
11.	Найти произведение целых решений (или целое решение, если оно одно) неравенства $\sqrt{x-3}>\sqrt{6-x}$.	1) 30; 2) 27; 3) 5; 4) 6; 5) 24.
12.	Найти произведение целых решений (или целое решение, если оно одно) неравенства $\sqrt{x^2-3x}\le\sqrt{3x-8}$.	1) 3; 2) 4; 3) 7; 4) 12; 5) 24.
13.	Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt{12-x}>x$, удовлетворяющих условию $\lvert x\rvert<7$.	1) –17; 2) –16; 3) –15; 4) –25; 5) –18.
14.	Найти количество целых решений неравенства $\sqrt{x^2-8x}<x-2$, не превосходящих 20.	1) 12; 2) 13; 3) 14; 4) 15; 5) 16.
15.	Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[6]{3-x}-2\le0$.	1) 3; 2) 7; 3) 5; 4) 6; 5) 12.
16.	Найти сумму целых решений (или целое решение, если оно одно) неравенства $4x-x^2-5\sqrt{4x-x^2}+6\le0$.	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 16; 5) 2.
17.	Найти количество целых решений неравенства $\sqrt{\frac{x+1}{2x-5}}<2$ таких, что $\lvert x\rvert\le6$.	1) 10; 2) 9; 3) 8; 4) 7; 5) 11.
18.	Решением неравенства $\sqrt[3]{\frac{4-x}{x-3}}>1$ является множество:	1) (3; 3,5); 2) (3; 3,5]; 3) $(-\infty;3)\cup(3,5;+\infty)$; 4) R; 5) $(-\infty;3)$.
19.	Решением неравенства $2\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}>2$ является множество:	1) $(\frac{2}{3};+\infty)$; 2) $(0;\frac{2}{3}]$; 3) $[0;\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3};+\infty)$; 4) R; 5) $(0;\frac{2}{3})$.
20.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{\sqrt{6x-x^2}}{x^2-4}\le\frac{\sqrt{4x-8}}{x^2-4}$.	1) 7; 2) 9; 3) 8; 4) 15; 5) 10.
21.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{3}{\sqrt{x-1}+1}+2\sqrt{x-1}<5$.	1) 6; 2) 9; 3) 8; 4) 15; 5) 10.
22.	Решением неравенства $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}>1$ является множество:	1) $(-\infty;0)$; 2) $(1;\frac{5}{3}]$; 3) $[0;\frac{5}{3})$; 4) $(1;\frac{5}{3})$; 5) R.

10. Модуль числа. Его свойства

Модулем (абсолютной величиной) числа a называется расстояние от точки, изображающей данное число a на числовой прямой, до начала отсчета. Из определения следует, что $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Свойства модуля:

1) $|a| \geq 0$;

2) $|a| = |-a|$;

3) $|a| \geq a$;

4) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$;

6) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

7) $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases}$

8) $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0; \end{cases}$

9) $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$;

10) $|a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \leq 0$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Вычислить $\lvert-5{,}2\rvert + \lvert4\rvert - \lvert1-\sqrt{7}\rvert + \lvert3-\sqrt{7}\rvert$.	1) $13{,}2 - 2\sqrt{7}$; 2) 3,2; 3) 11,2; 4) $2\sqrt{7} - 7{,}2$; 5) $7{,}2 - 2\sqrt{7}$.
2.	Найдите значение выражения $\lvert x-y\rvert + \lvert 2y-x\rvert - 3\lvert x-4y\rvert$ при $x=-3$, $y=8$.	1) –75; 2) –81; 3) 75; 4) 81; 5) –87.
3.	Упростить выражение $\lvert x-2\rvert + \lvert x+3\rvert - \lvert 4x-5\rvert$ при $x \in [1{,}6;\ 1{,}8]$.	1) $-2x-4$; 2) $-4x+10$; 3) $-4x$; 4) $4x-6$; 5) $6x-4$.
4.	Упростить выражение $\lvert\pi-4\rvert + \lvert1-\pi\rvert$.	1) –3; 2) 5; 3) 3; 4) $2\pi - 5$; 5) $5 - 2\pi$.
5.	Упростить выражение $\lvert x^2+1\rvert + \lvert 4x-x^2-4\rvert$.	1) $4x-3$; 2) 0; 3) $4x+5$; 4) $2x^2+4x-5$; 5) $2x^2-4x+5$.
6.	Упростить выражение $\lvert x^2+x+5\rvert + \lvert 1-x^2\rvert$ при $x \geq 1$.	1) $2x^2+x+4$; 2) $x+6$; 3) 0; 4) $2x^2+x+6$; 5) $2x^2-x+6$.
7.	Значение выражения $\sqrt{(\sqrt{7}-11)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}+11)^2}$ равно:	1) $2\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) 22; 4) $22 - 2\sqrt{7}$; 5) $22 + 2\sqrt{7}$.
8.	Упростить выражение $\sqrt{16-8x+x^2} + \lvert-x\rvert - 4$ при $x \in [-6;\ -5]$.	1) $-2x$; 2) –8; 3) 0; 4) $2x-8$; 5) $8-2x$.
9.	Упростить выражение $\sqrt{a^2-12ab+36b^2} + a$ при $a < 6b$.	1) $2a-6b$; 2) $-6b$; 3) $6b$; 4) $2a+6b$; 5) $-2a-6b$.
10.	Упростить выражение $\frac{25-y^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{81}{y^2+10y+25}}$ при $y < -5$.	1) $9(5-y)$; 2) $3(5-y)$; 3) $9(y-5)$; 4) $3(y-5)$; 5) 3.
11.	Упростить выражение $(4-4b+b^2) \cdot \sqrt{\frac{12}{3b^2+12-12b}} - 2b$ при $b > 2$.	1) $-2b$; 2) –4; 3) 4; 4) $2b-4$; 5) $4-2b$.
12.	Из перечисленных утверждений выбрать верные: а) $\lvert x^2-7\rvert = \lvert 7-x^2\rvert$ для любого действительного x; б) $\lvert b-a\rvert = \lvert b+a\rvert$ для любых действительных a и b; в) выражение $\lvert a\rvert$ определено только при $a \geq 0$; г) $\lvert a\rvert > a$ для любого действительного числа a; д) $\lvert x^2-9\rvert = \lvert 3-x\rvert \cdot \lvert x+3\rvert$ для любого действительного x.	1) а, г, д; 2) б, в, г; 3) а, в, г; 4) г, д; 5) а, д.

11. Уравнения с модулем

Рассмотрим схемы решения основных типов уравнений с модулем:

1. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Метод решения обычно выбирают в зависимости от того, какое из неравенств $f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$ решается легче.

2. $|f(x)| = c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = c, \\ f(x) = -c, \end{array}\right.$ если $c \geq 0$. При $c < 0$ уравнение не имеет корней.

3. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$.

4. Уравнение вида $a_1|f_1(x)| + a_2|f_2(x)| + \ldots + a_n|f_n(x)| = g(x)$, где a_k — некоторые действительные числа, решают методом интервалов, схема которого имеет вид:

- определяются точки, в которых каждая из функций $f_i(x) = 0$;
- найденными точками разбивают О.Д.З уравнения на промежутки, на каждом из которых все функции $f_i(x)$ сохраняют знак;
- уравнение решается на каждом промежутке, модули раскрываются с учетом знаков функций на рассматриваемом промежутке;
- все полученные решения объединяются.

5. Решение некоторых уравнений основано на использовании свойств модуля (см. п. 10).

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Какие из уравнений: а) $\|x-1\| = 2$; б) $\|x\| = \sqrt{5} - 3$; в) $\|x\| = -x^2$; г) $\|x\| = -x^2 - 2$; д) $\|x-2\| = \|2-x\|$ имеют решения?	1) а, в, д; 2) б, в, г; 3) а, в; 4) г, д; 5) а, г.
2.	Какие из уравнений: а) $\|x\| = 1 - \sqrt{2}$; б) $\|x\| = -x$; в) $\|x+4\| = \|-x-4\|$; г) $\|x\| = 1$; д) $\|2x-5\| = 2x-5$ имеют бесконечное множество решений?	1) а, в; 2) в, г; 3) а, д; 4) б, в, д; 5) а, г.
3.	Какие из уравнений: а) $\|x\| = 0$; б) $\|x\| = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$; в) $\|x\| = -(x-3)^2$; г) $\|6-x\| = x-6$; д) $\|x^2+5\| = 0$ не имеют решений?	1) б, в, д; 2) б, в, г; 3) а, в; 4) г, д; 5) а, г.
4.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $\|x^2 - 26\| = 10$.	1) 12; 2) 8; 3) –12; 4) –24; 5) 24.
5.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\|x-14\| = -5$.	1) 19; 2) 9; 3) 28; 4) 14; 5) нет корней.
6.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\|x^2 - 7x + 5\| = 5$.	1) 7; 2) 8; 3) 14; 4) 10; 5) нет корней.
7.	Найти разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $4x^2 + 7\|x\| = 2$.	1) 0,25; 2) 0,5; 3) 4; 4) 4,25; 5) 0,0625.
8.	Найти значение выражения $m^2 - p$, где m — больший корень, а p — количество корней уравнения $x^2 - 3\sqrt{x^2} + 2 = 0$.	1) 2; 2) –1; 3) 0; 4) –2; 5) –3.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
9.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{x^2+\lvert x\rvert-30}{x^2-7x+10}=0$.	1) 0; 2) –5; 3) 5; 4) 12; 5) 10.
10.	Найти больший корень уравнения $4x^2-12x+9+4\lvert 2x-3\rvert=21$.	1) 0; 2) 6; 3) 5; 4) 3; 5) 9.
11.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $3x^2-x-3+\frac{\lvert x-1\rvert}{x-1}=0$.	1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-1\frac{2}{3}$; 4) –1; 5) нет корней.
12.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $5x^2-7x+6\cdot\frac{\lvert x-2\rvert}{2-x}=0$.	1) 2; 2) $1\frac{2}{5}$; 3) $-\frac{3}{5}$; 4) 0; 5) нет корней.
13.	Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2+x+\lvert x-3\rvert=21$.	1) 34; 2) 32; 3) 16; 4) 18; 5) 68.
14.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert 2x-8\rvert+\lvert 20-5x\rvert=0$.	1) 0; 2) 4; 3) 5; 4) 3; 5) нет корней.
15.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x^2+2x\rvert+\lvert 5x^2+8x-4\rvert=0$.	1) –1,6; 2) –2; 3) 1; 4) 3; 5) нет корней.
16.	Найти произведение корней уравнения $\lvert\lvert 2x-1\rvert-3\rvert=4$.	1) 0; 2) –3; 3) 4; 4) –12; 5) 12.
17.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x\rvert(x+5)=6$.	1) 5; 2) 1; 3) 3; 4) –5; 5) –4.
18.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x^2-x+5\rvert-\lvert x+5\rvert-3=0$.	1) 3; 2) 8; 3) –3; 4) 21; 5) –1.
19.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert 4x-x^2-4\rvert+\lvert x\rvert-2=0$.	1) 5; 2) 8; 3) 3; 4) 2; 5) –2.
20.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert 2x-5\rvert=\lvert 7-x\rvert$.	1) 5; 2) –8; 3) 3; 4) 4; 5) –2.
21.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x^2-x-8\rvert-\lvert x^2-4x+1\rvert=0$.	1) 5,5; 2) 6,5; 3) 3; 4) 3,5; 5) –2.
22.	Все корни уравнения $\lvert x+6\rvert+\lvert 3+x\rvert=3$ образуют множество:	1) $(-\infty;-6]$; 2) $[-3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-6]\cup[-3;+\infty)$; 4) $[-6;-3]$; 5) нет корней.
23.	Найти сумму целых корней уравнения $\lvert x-2\rvert+\lvert x-5\rvert=3$.	1) 12; 2) 9; 3) 1; 4) 7; 5) 14.
24.	Найти значение выражения $S\cdot n$, где S — сумма, а n — количество целых корней уравнения $\lvert x^2-x-12\rvert+\lvert x^2-x-30\rvert=18$.	1) 18; 2) 24; 3) 8; 4) 6; 5) 12.
25.	Найти количество целых отрицательных корней уравнения $\lvert x^3-x^2-12x\rvert=x^3-x^2-12x$.	1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 1.
26.	Все корни уравнения $\left\lvert\frac{x^2-16x}{x^2+2x-15}\right\rvert=\frac{16x-x^2}{x^2+2x-15}$ образуют множество:	1) $(\infty;-5]$; 2) $(-5;0]\cup(3;16]$; 3) $[0;3)\cup[16;+\infty)$; 4) $[-16;-3]$; 5) нет корней.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
27.	Найти количество целых корней уравнения $\lvert(x-4)(x^2-5x-6)\rvert=(x-4)\lvert x^2-5x-6\rvert$, принадлежащих отрезку [–2; 15].	1) 13; 2) 14; 3) 18; 4) 15; 5) 16.
28.	Найти сумму целых корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x^2-144\rvert=(-x-12)\lvert x-12\rvert$, принадлежащих отрезку [–15; 15].	1) 12; 2) –42; 3) 0; 4) –30; 5) –54.
29.	Найти сумму целых корней (или корень, если он один) уравнения $\left\lvert\frac{x+5}{x^2-x-2}\right\rvert=\frac{x+5}{\lvert x^2-x-2\rvert}$, принадлежащих отрезку [–10; 10].	1) –5; 2) 40; 3) 39; 4) 0; 5) 42.
30.	Найти значение выражения $P\cdot n$, где P — произведение, а n — количество корней уравнения $\lvert 16-x^2\rvert+\left(\sqrt{x^2-16}\right)^2=30$.	1) 124; 2) 62; 3) 0; 4) –62; 5) –31.
31.	Найти значение выражения $P\cdot n$, где P — произведение, а n — количество корней уравнения $\lvert 16-x^2\rvert+\sqrt{(x^2-16)^2}=30$.	1) 124; 2) 62; 3) 0; 4) –62; 5) –31.
32.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x^2-2\rvert=x$.	1) 3; 2) 4; 3) –3; 4) –4; 5) 0.
33.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x-5\rvert=x^2-9x+20$.	1) 13; 2) 5; 3) 8; 4) 3; 5) 2.
34.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert x^2-2x-5\rvert=x-1$.	1) –6; 2) –24; 3) –4; 4) 24; 5) 12.
35.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert 12-4x\rvert=x^2-3x$.	1) –1; 2) 0; 3) 7; 4) 3; 5) 6.
36.	Найти сумму целых корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{\lvert x^2-9x+18\rvert-\lvert 9x-18\rvert+x^2}{\sqrt{20-4x}}=0$.	1) 18; 2) 15; 3) 12; 4) 9; 5) 7.
37.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{\lvert 2x-6\rvert+\lvert x-1\rvert-3}{\sqrt{9-x^2}}=0$.	1) $2\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 5; 5) 2.
38.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $(3-\lvert x-4\rvert)\sqrt{4-x}=0$.	1) 4; 2) 5; 3) 7; 4) 8; 5) 12.
39.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{16+6x-x^2}(15-\lvert 17-x\rvert)=0$.	1) 6; 2) 10; 3) 40; 4) 8; 5) 32.
40.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $(x-6)\left(\lvert x-2\rvert+\lvert x+4\rvert\right)=\lvert x-6\rvert$.	1) 6; 2) 5,5; 3) 4; 4) 0,5; 5) 2.
41.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{\lvert x+3\rvert+x^2-8\lvert x\rvert+16}{-x-5}=\lvert x+1\rvert$.	1) 13; 2) –10; 3) –4; 4) –8; 5) –5.
42.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lvert 5-x+\lvert 2x-7\rvert\rvert=x+2$.	1) 3; 2) 1; 3) –2; 4) –4; 5) –1.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
43.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $\|2x+4-\|x-12\|\|=3-x$.	1) 5; 2) 2,75; 3) 2,5; 4) –13; 5) –19,5.
44.	Найти количество целых решений уравнения $\left\|\frac{x-2}{x+1}\right\|+\|x\|=\left\|\frac{x^2+2x-2}{x+1}\right\|$, не превосходящих 7.	1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9; 5) 10.
45.	Найти количество целых решений уравнения $\left\|\frac{x-5}{x}\right\|+\|x-4\|=\left\|\frac{5x-5-x^2}{x}\right\|$, удовлетворяющих условию $x\geq -3$.	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
46.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}\|x\|+\|y\|=4,\\ \|x\|-2\|y\|=-5\end{cases}$, то значение выражения $(x^2+y^2)\cdot n$, где n — количество пар решений системы, равно:	1) 10; 2) 20; 3) 30; 4) 40; 5) 50.
47.	Если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases}\|x+2y\|=3,\\ \|x-2y\|=1\end{cases}$, то наибольшее значение выражения $x+4y$ равно:	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.

12. Неравенства с модулем

Рассмотрим частные случаи неравенств, содержащих знак модуля, и методы их решения.

1) Неравенство вида $|f(x)|<g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, равносильно системе: $\begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>-g(x).\end{cases}$

В частности, неравенство вида $|f(x)|<a$ *при любом* $a>0$ равносильно системе: $\begin{cases}f(x)<a,\\ f(x)>-a.\end{cases}$ или $-a<f(x)<a$.

При $a\leq 0$ неравенство *не имеет решений.*

2) Неравенство вида $|f(x)|>g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, равносильно совокупности:

$\left[\begin{array}{l}f(x)>g(x),\\ f(x)<-g(x).\end{array}\right.$

В частности, неравенство $|f(x)|>a$ равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l}f(x)>a,\\ f(x)<-a.\end{array}\right.$, если $a>0$. При $a\leq 0$ неравенство выполняется при всех x, для которых $f(x)$ имеет смысл.

3) Неравенство вида $|f(x)|<|g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x)<g^2(x)$, преобразуя которое, получим: $(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))<0$. Решим его методом интервалов.

4) Неравенство вида $f(|x|)>0$ можно решить, используя замену $|x|=y, y\geq 0$ или раскрывая модуль по определению.

5) Неравенство вида $a_1|f_1(x)|+a_2|f_2(x)|+\ldots+a_n|f_n(x)|>g(x)$, где a_k — некоторые действительные числа, решают методом интервалов, схема которого аналогична схеме решения уравнения такого же типа.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Решением неравенства $\|4-2x\|<2$ является множество:	1) (1; 3); 2) (–2; 2); 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(3; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$.
2.	Решением неравенства $\|x-3\|\geq 11$ является множество:	1) [–8; 14]; 2) [–11; 11]; 3) $(-\infty; -8]$; 4) $[14; +\infty)$; 5) $(-\infty; -8]\cup[14; +\infty)$.
3.	Количество целых решений неравенства $0<\|x-2\|<4$ равно:	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
4.	Количество целых решений неравенства $0 \le \lvert 12-2y \rvert \le 3$ равно:	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 2.
5.	Решением неравенства $\lvert 2x+6 \rvert \ge -2$ является множество:	1) $[-6; 0]$; 2) $[-6; 6]$; 3) $(-\infty; -6]$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$.
6.	Решением неравенства $\left\lvert \frac{5x+1}{x-4} \right\rvert > -1$ является множество:	1) $[-0,2; 4]$; 2) $[-1; 1]$; 3) $(-\infty; -1]$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.
7.	Найти количество целых решений неравенства $x^2 - 10\lvert x \rvert + 16 > 0$, принадлежащих отрезку $[-10; 10]$.	1) 21; 2) 20; 3) 9; 4) 7; 5) 8.
8.	Найти сумму всех целых решений неравенства $x^2 + 6x + \lvert x+3 \rvert + 3 \le 0$.	1) –9; 2) –10; 3) –15; 4) –5; 5) –6.
9.	Решением неравенства $\lvert 2-3x \rvert < x$ является множество:	1) $(1; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(0,5; 1)$; 4) $(-\infty; 0,5)$; 5) $(-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$.
10.	Количество целых чисел, не являющихся решениями неравенства $\lvert x^2 - 30 \rvert \ge x$, равно:	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
11.	Найти сумму всех целых решений неравенства $\lvert x^2 - 3x - 1 \rvert \le x + 4$.	1) 3; 2) 9; 3) 13; 4) 14; 5) 20.
12.	Найти наименьшее положительное целое решение неравенства $\lvert 5-2x \rvert > \lvert x-4 \rvert$.	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.
13.	Найти количество целых решений неравенства $\lvert 3-x-x^2 \rvert \ge \lvert 1-2x \rvert$, принадлежащих отрезку $[-10; 10]$.	1) 21; 2) 20; 3) 19; 4) 18; 5) 17.
14.	Найти сумму целых решений неравенства $\lvert x^2 - 5x + 4 \rvert \le 5x - x^2 - 4$.	1) 5; 2) 10; 3) 15; 4) 9; 5) 7.
15.	Найти сумму целых решений неравенства $\lvert 5x - x^2 + 14 \rvert \le (7-x)(x+2)$.	1) –25; 2) 15; 3) –15; 4) 5; 5) 25.
16.	Решением неравенства $\left\lvert \frac{2}{1-x} \right\rvert \ge \left\lvert \frac{4x}{x^2-1} \right\rvert$ является множество:	1) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-\frac{1}{3}; 1)$; 3) $(-\infty; -1]$; 4) $(1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup [-\frac{1}{3}; 1)$.
17.	Решением неравенства $\lvert 4-x \rvert + \lvert 5-2x \rvert \ge 0$ является множество:	1) $[2,5; 4]$; 2) R; 3) нет решений; 4) $(4; +\infty)$; 5) $(-\infty; -2,5]$.
18.	Решением неравенства $\lvert 8-x \rvert + \lvert 4x+16 \rvert < 0$ является множество:	1) $[-4; 8]$; 2) R; 3) нет решений; 4) $(8; +\infty)$; 5) $(-\infty; -4]$
19.	Решением неравенства $\lvert 18-2x \rvert + \lvert x^2 - 9x \rvert \le 0$ является множество:	1) $x = 9$; 2) R; 3) нет решений; 4) $(-\infty; 0]$; 5) $[9; +\infty)$.
20.	Найти количество целых решений неравенства $\lvert 2x-6 \rvert + \lvert 4-x \rvert \ge 4$, принадлежащих отрезку $[0; 10]$.	1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11; 5) 12.
21.	Найти сумму всех целых решений неравенства $\lvert 3x+15 \rvert - \lvert 2-x \rvert - 1 \le x$.	1) –9; 2) –10; 3) –5; 4) –15; 5) –6.
22.	Найти количество целых решений неравенства $\lvert 1-x \rvert (x^2-4) \ge 0$, принадлежащих отрезку $[-20; 20]$.	1) 41; 2) 40; 3) 37; 4) 38; 5) 39.
23.	Решением неравенства $\lvert 2x^2 - 11x - 6 \rvert (5-x) < 0$ является множество:	1) $(5; +\infty)$; 2) $(5; 6)$; 3) $(-\infty; 6)$; 4) $(-\infty; 5)$; 5) $(5; 6) \cup (6; +\infty)$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
24.	Найти количество целых решений неравенства $\frac{\lvert x\rvert-2}{\lvert x+1\rvert-10}\le 0$.	1) 13; 2) 14; 3) 15; 4) 16; 5) 17.
25.	Найти сумму целых решений неравенства $\left\lvert\frac{\lvert 3-x\rvert+1}{2\lvert x\rvert-4}-1\right\rvert>2$.	1) 8; 2) 5; 3) 1; 4) –2; 5) –3.
26.	Найти область определения функции $y=\sqrt{\lvert x-12\rvert+\lvert 3x+6\rvert-2}$.	1) $(-2;+\infty)$; 2) $[-2;+\infty)$; 3) $(-2;12)$; 4) R; 5) $(-\infty;-2)\cup(12;+\infty)$.
27.	Найти количество целых значений x, принадлежащих области определения функции $y=\sqrt[4]{\frac{2\lvert x\rvert-1}{\lvert 1-x\rvert-4}}+\frac{1}{\lvert x\rvert-8}$ и удовлетворяющих условию $x\in[-15;15]$.	1) 31; 2) 24; 3) 23; 4) 22; 5) 21.

13. Прогрессии. Суммирование

13.1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ у которой для любого $n\ge 1$ верно равенство: $a_{n+1}=a_n+d$, где d — определенное для данной прогрессии число (*разность* арифметической прогрессии). По определению $d=a_{n+1}-a_n$, где $n\in N$, $n\ge 1$.

Если $d>0$, то прогрессия является **возрастающей**, если $d<0$, то **убывающей**.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, необходимо знать ее первый член a_1 и разность d.

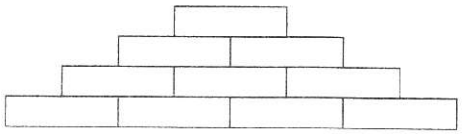
Формула n-го члена арифметической прогрессии	Сумма n первых членов арифметической прогрессии	Свойство арифметической прогрессии	Признак арифметической прогрессии
$a_n=a_1+d(n-1)$	$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$	если $m+n=p+k$, то $a_m+a_n=a_p+a_k$	для любого $n\ge 2$: $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

13.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией со **знаменателем** $q\ne 0$ называется числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots b_n$, у которой для любого $n\ge 1$ верно равенство: $b_{n+1}=b_n\cdot q$. По определению $q=\frac{b_{n+1}}{b_n}$, где $n\in N$, $n\ge 1$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии	Сумма n первых членов геометрической прогрессии	Свойство геометрической прогрессии	Признак геометрической прогрессии
$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$	$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$	если $m+n=p+k$, то $b_m\cdot b_n=b_p\cdot b_k$	для любого $n\ge 2$: $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$

Геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|<1$ называется *бесконечно убывающей* геометрической прогрессией. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $S=\frac{b_1}{1-q}$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Какая из конечных последовательностей: а) –2; 4; –8; 16; б) –3; 6; 15; 24; в) 0; 1; 3; 5; г) 24; 12; 6; 3; д) 6; 4; 5; 3 является арифметической прогрессией?	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
2.	Найдите первый член арифметической прогрессии, у которой 20-й член равен 41, а разность равна 5.	1) –41; 2) –54; 3) –95; 4) –56 5) –57.
3.	Если задана арифметическая прогрессия: 5; 9; 13; 17..., то одним из ее членов является число: а) 248; б) 64; в) 52; г) 125; д) 212.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
4.	Первый член арифметической прогрессии равен –2, третий член равен 4. Найдите сумму первых пяти членов прогрессии.	1) 10; 2) 15; 3) 20; 4) 12; 5) 14.
5.	Известно, что первый член арифметической прогрессии равен 3, а 9-й член в 5 раз больше 2-го. Найдите разность прогрессии.	1) 1,5; 2) 2; 3) 2,5; 4) 3; 5) 4.
6.	Второй член арифметической прогрессии равен 2,1, а третий равен 2. Найдите сумму первых восьми членов прогрессии.	1) 10; 2) 15; 3) 14,8; 4) 12,6; 5) 10,8.
7.	Детали конструктора сложены в форме треугольника так, что в 1-м ряду — 1 деталь, во 2-м — 2 детали и т. д.  Сколько нужно деталей, чтобы сложить треугольник из 17-и рядов?	1) 153; 2) 136; 3) 200; 4) 119; 5) 170.
8.	Известно, что углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. В ответе укажите средний из углов (в градусах).	1) 30; 2) 40; 3) 50; 4) 60; 5) 45.
9.	Между числами –12 и 3 вставили 4 числа, образующих вместе с ними арифметическую прогрессию. Наименьшее из вставленных чисел равно:	1) –11; 2) –10; 3) –9; 4) –8; 5) –7.
10.	Найдите сумму 4-го и 13-го членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма ее 6-го и 11-го членов равна 96.	1) 96; 2) 48; 3) 24; 4) 64; 5) 56.
11.	Сумма 3-го и 9-го членов арифметической прогрессии равна 19, а 9-й член в 4 раза больше 2-го. Найдите 3-й член прогрессии.	1) 1,5; 2) 2; 3) 3,5; 4) 5; 5) 5,5.
12.	Сумма первых 13-ти членов арифметической прогрессии равна 52. Найдите 7-й член прогрессии.	1) 3; 2) 5; 3) 2; 4) 7; 5) 4.
13.	14-й член арифметической прогрессии равен –2. Найдите сумму 27-и первых членов прогрессии.	1) –12; 2) –10; 3) –46; 4) –54; 5) –81.
14.	Дана арифметическая прогрессия, n-й член которой задан формулой $a_n = -16 + 4n$. Найдите разность прогрессии.	1) –3; 2) 3; 3) 2; 4) –4; 5) 4.
15.	Сумма n первых членов арифметической прогрессии задана формулой $S_n = 1{,}05n + 0{,}15n^2$. Найдите 5-й член прогрессии.	1) 1,5; 2) 2,4; 3) 3,5; 4) 5,2; 5) 5,5.
16.	Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 220.	1) 25000; 2) 24310; 3) 24520; 4) 24460; 5) 26100.
17.	Найдите сумму всех целых чисел от –5 до 150.	1) 10000; 2) 11165; 3) 11520; 4) 11310; 5) 11100.
18.	Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, кратных числу 3.	1) 1662; 2) 1668; 3) 2412; 4) 1614; 5) 1665.
19.	Найти сумму всех натуральных чисел от 20 до 98, которые при делении на 5 дают в остатке 2.	1) 962; 2) 957; 3) 952; 4) 947; 5) 942.
20.	Найти значение суммы $100^2 - 98^2 + 96^2 - 94^2 + ... + 4^2 - 2^2$.	1) 5200; 2) 5600; 3) 5400; 4) 5000; 5) 5100.
21.	Дана арифметическая прогрессия с разностью $d > 1$. Произведение 2-го и 5-го членов прогрессии равно 232, а сумма первых пяти членов равна 75. Число 106 является членом данной прогрессии. Найдите его номер.	1) 10; 2) 12; 3) 14; 4) 15; 5) 16.

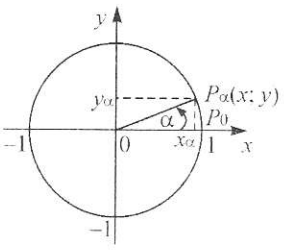
№ п/п	Задания	Варианты ответов
22.	Сумма 4-го, 7-го, 16-го и 35-го членов арифметической прогрессии равна 40. Найдите сумму первых тридцати членов этой прогрессии.	1) 600; 2) 570; 3) 400; 4) 300; 5) 420.
23.	Какая из конечных последовательностей: а) –1; –2; 4; 8; б) 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$; в) 3; 5; 7; 9; г) –3; 0; 3; 6; д) –1; 0,1; –0,11; 0,111 является геометрической прогрессией?	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
24.	Первый член геометрической прогрессии равен 2, а ее знаменатель равен 3. Найдите пятый член этой прогрессии.	1) 486; 2) 162; 3) 81; 4) 54; 5) 27.
25.	В геометрической прогрессии с положительными членами произведение 6-го и 8-го членов равно 256. Найдите 7-й член прогрессии.	1) 12; 2) 14; 3) 16; 4) 18; 5) 128.
26.	Известно, что число 2048 является членом геометрической прогрессии $\frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \ldots$. Найдите его номер.	1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11; 5) 12.
27.	В геометрической прогрессии произведение 3-го и 14-го членов равно 106. Найдите произведение 6-го и 11-го членов.	1) 53; 2) 106; 3) 212; 4) 318; 5) 424.
28.	Озеро зарастает кувшинками так, что поверхность заросшей части каждый день удваивается по сравнению с предыдущим. Известно, что все озеро заросло за 28 дней. За сколько дней заросла четвертая часть озера?	1) 4; 2) 7; 3) 14; 4) 26; 5) 27.
29.	Первый член геометрической прогрессии равен 3, а ее знаменатель равен 2. Найдите сумму десяти первых членов этой прогрессии.	1) 3200; 2) 3069; 3) 2124; 4) 3186; 5) 4248.
30.	В геометрической прогрессии, члены которой — отрицательные числа, сумма 1-го и 3-го членов равна –20, а произведение 1-го и 5-го членов равно 4. Найдите 2-й член прогрессии.	1) –12; 2) –10; 3) –6; 4) –4; 5) –1.
31.	В геометрической прогрессии со знакочередующимися членами произведение 2-го, 3-го и 7-го членов равно 27, а десятый член равен 192. Найдите 6-й член прогрессии.	1) 6; 2) 9; 3) 12; 4) 15; 5) 18.
32.	Сумма n первых членов геометрической прогрессии задана формулой $S_n = 10^{-3}(10^n - 1)$. Найдите 3-й член прогрессии.	1) 0,09; 2) 0,9; 3) 9; 4) 90; 5) 900.
33.	Найти значение суммы $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^7$.	1) 1093; 2) 1112; 3) 2048; 4) 2812; 5) 3280.
34.	Найдите значение суммы $1 + x + x^2 + \ldots + x^9$ при $x = 2$.	1) 1023; 2) 511; 3) 2047; 4) 1812; 5) 1424.
35.	Три числа, сумма которых равна 36, образуют арифметическую прогрессию. Если третье число увеличить на 6, а два первых оставить без изменения, то полученная тройка чисел составит убывающую геометрическую прогрессию. Найдите первое по счету число.	1) 6; 2) 9; 3) 12; 4) 18; 5) 24.
36.	1-й, 10-й и 13-й члены арифметической прогрессии, взятые в данном порядке, образуют убывающую геометрическую прогрессию. Известно, что 5-й член арифметической прогрессии равен 38. Найдите сумму первых 15-и членов этой прогрессии.	1) 390; 2) 362; 3) 520; 4) 780; 5) 824.
37.	Найти произведение корней уравнения $2 + 4 + 6 + \ldots + x^2 = 420$.	1) 20; 2) –20; 3) 40; 4) –40; 5) 30.
38.	Найдите корень уравнения $(x + 5) + (2x + 8) + (3x + 11) + \ldots + (21x + 65) = 1659$.	1) 3; 2) 4; 3) 3,5; 4) 4,5; 5) 5.

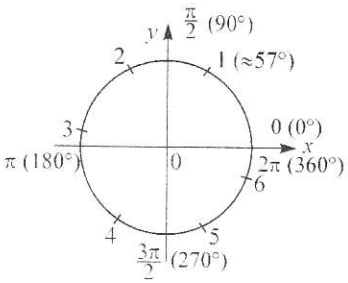
14. Вычисление и преобразование тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций

14.1. Определение и свойства тригонометрических функций

На рисунке изображена единичная окружность. Точка P_0 — начало отсчета углов. Точка $P_\alpha(x; y)$ соответствует углу α. Определение синуса и косинуса с помощью единичной окружности: $\sin\alpha = y_\alpha$, $\cos\alpha = x_\alpha$.

Определения тангенса и котангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



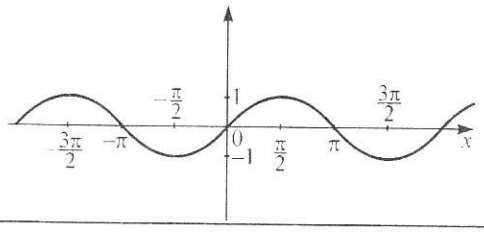


Соотношение между градусной и радианной мерой угла: $180° = \pi$. Тогда если $x°$ — градусная мера угла, а α — его радианная мера, то верно равенство: $\frac{x°}{\alpha} = \frac{180°}{\pi}$.

Рассмотрим свойства числовых функций, заданных формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, по следующей схеме: 1) область определения; 2) область значений; 3) четность (нечетность); 4) наименьший положительный период; 5) нули; 6) промежутки, на которых функция принимает положительные и отрицательные значения; 7) промежутки возрастания и убывания; 8) точки экстремума и экстремумы; 9) график функции.

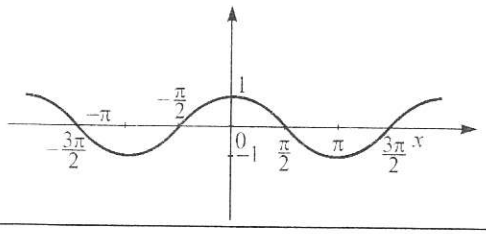
$y = \sin x$

1) R;
2) $[-1; 1]$;
3) четная: $\cos(-x) = \cos x$;
4) $T = 2\pi$;
5) $x = \pi n$, $n \in Z$;
6) $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$; $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$; $n \in Z$;
7) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$; $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$; $n \in Z$
8) $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y_{max} = 1$, $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y_{min} = -1$; $n \in Z$;
9)



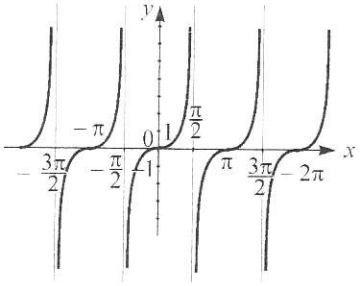
$y = \cos x$

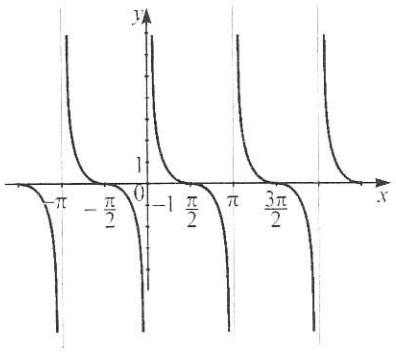
1) R;
2) $[-1; 1]$;
3) нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$;
4) $T = 2\pi$;
5) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;
6) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$; $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$; $n \in Z$;
7) $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$; $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$; $n \in Z$;
8) $x_{max} = 2\pi n$, $y_{max} = 1$; $x_{min} = \pi + 2\pi n$, $y_{min} = -1$; $n \in Z$;
9)



$y = \operatorname{tg} x$

1) $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;
2) R;
3) нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;
4) $T = \pi$;
5) $x = \pi n$;
6) $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$; $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$;
7) $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$; нет промежутков убывания;
8) нет;
9)



$y = \operatorname{ctg} x$	
1) $x \in R;\ x \neq \pi n;$ 2) $R;$ 3) нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x;$ 4) $T = \pi;$ 5) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$ 6) $(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n);\ (-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n);$ 7) нет промежутков убывания: $(\pi n;\ \pi + \pi n);$ 8) нет;	9) 

Определение периодической функции и теоремы о нахождении периода функции см. в разделе 23.

14.2. Основные формулы тригонометрии

Основные тригонометрические тождества

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ x \in R;$

2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

3) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z;$

4) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,\ x \neq \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z;$

5) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

6) $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z.$

Формулы сложения

1) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$

2) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$

3) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$

Формулы двойного угла

1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x;$

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$

3) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z.$

Формулы половинного угла (понижения степени)

1) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2};$

2) $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$

3) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x};$

4) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$

Формулы преобразования суммы в произведение

1) $\sin x \pm \sin y = 2\sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2};$

2) $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$

3) $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2};$

4) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$

Формулы преобразования произведения в сумму

1) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)];$

2) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)];$

3) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)].$

Формулы тройного угла

1) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$

2) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

x в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
x в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0

Формулы универсальной тригонометрической подстановки

1) $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

3) $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, $n \in Z$.

Формулы приведения

Эти формулы позволяют свести вычисления значения любой тригонометрической функции угла $\beta \in (0; 2\pi)$ к вычислению значения тригонометрической функции острого угла α. Для этого исходный угол β необходимо записать в виде: $\beta = \frac{\pi}{2} \cdot n + \alpha$, где $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ и применить два следующих *мнемонических* правила:

а) *Правило знака:* в правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть, при условии, что угол принадлежит 1-й четверти.

б) *Правило названий:* если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то название функции меняется на сходную («sin» — на «cos», «tg» — на «ctg» и наоборот); если угол равен $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$, то название функции сохраняется.

Пример 1. Найти значение выражения $4\sin\frac{17\pi}{6} + 3\sqrt{3}\operatorname{tg}1020°$.

Вычислим $\sin\frac{17\pi}{6}$ и $\operatorname{tg}1020°$, используя свойства периодичности тригонометрических функций и формулы приведения.

$$\sin\frac{17\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$\operatorname{tg}1020° = \operatorname{tg}(5 \cdot 180° + 120°) = \operatorname{tg}120° = \operatorname{tg}(90° + 30°) = -\operatorname{ctg}30° = -\sqrt{3}$.

Найдем значение исходного выражения: $4\sin\frac{17\pi}{6} + 3\sqrt{3}\operatorname{tg}1020° = 4 \cdot \frac{1}{2} + 3\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) = 2 - 9 = -7$.

Ответ: –7.

Пример 2. Найти значение выражения $\dfrac{1-\cos^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} - \frac{1}{4}\cos^2 4\alpha$, если $\alpha = \frac{\pi}{32}$.

Решение. Упростим выражение, используя основные тригонометрические тождества и формулы двойного угла.

$$\frac{1-\cos^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} - \frac{1}{4}\cos^2 4\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{\frac{1}{\cos^2 2\alpha}} - \frac{1}{4}\cos^2 4\alpha = \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha - \frac{1}{4}\cos^2 4\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}(2\sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 - \frac{1}{4}\cos^2 4\alpha = \frac{1}{4}(\sin^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha) = -\frac{1}{4}\cos 8\alpha.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{32}$ значение выражения равно $-\frac{1}{4}\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{32}\right) = -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Метод введения вспомогательного аргумента

Данный метод применяется для преобразования выражения $a\sin x + b\cos x$, в котором $a^2 + b^2 \neq 0$. Запишем исходное выражение в виде:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Так как при любых a и b верно равенство: $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует угол γ такой, что $\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\gamma)$.

Пример 3. Найдите наибольшее значение выражения $5\sqrt{3}\sin 3\alpha + 5\cos 3\alpha - 7$.

Преобразуем выражение $5\sqrt{3}\sin 3\alpha + 5\cos 3\alpha$ с использованием метода введения вспомогательного аргумента. В нашем случае $a = 5\sqrt{3}$, $b = 5$. Тогда $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{5^2(3+1)} = 10$ и получим:

$$5\sqrt{3}\sin 3\alpha + 5\cos 3\alpha = 10\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\sin 3\alpha + \frac{5}{10}\cos 3\alpha\right) = 10(\cos\frac{\pi}{6}\sin 3\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\cos 3\alpha) = 10\sin(3\alpha + \frac{\pi}{6}).$$

Тогда исходное выражение имеет вид: $10\sin(3\alpha + \frac{\pi}{6}) - 7$. Оценим его значение: $-1 \le \sin(3\alpha + \frac{\pi}{6}) \le 1$,

$-10 \le 10\sin(3\alpha + \frac{\pi}{6}) \le 10$, $-17 \le 10\sin(3\alpha + \frac{\pi}{6}) - 7 \le 3$.

Ответ: 3.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Выразить в градусах угол $\frac{7\pi}{12}$.	1) 105; 2) 225; 3) 130; 4) 145; 5) 115.
2.	Выразить в радианах угол 35°.	1) $\frac{5\pi}{18}$; 2) $\frac{7\pi}{36}$; 3) $\frac{2\pi}{9}$; 4) $\frac{5\pi}{36}$; 5) $\frac{7\pi}{30}$.
3.	Из данных утверждений: а) $\sin\pi = -1$; б) $\cos 2 > 0$; в) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin 3 > 0$; д) $\operatorname{tg} 312° > 0$ выбрать верное.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
4.	Из данных утверждений: а) $\sin 126° > 0$; б) $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$; в) $\operatorname{tg} 4 < 0$; г) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\operatorname{ctg}(-90°) = 0$ выбрать неверное.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
5.	Расположите числа: а) $\sin 3°$; б) $\sin\frac{3\pi}{2}$; в) $\sin 450°$; г) $\sin 1{,}5$; д) $\sin 50°$ в порядке возрастания.	1) а, б, в, г, д; 2) б, а, д, г, в; 3) б, г, а, д, в; 4) г, а, д, б, в; 5) д, г, в, б, а.
6.	Расположите числа: а) $\cos 14°$; б) $\cos\frac{\pi}{2}$; в) $\cos 43°$; г) $\cos\pi$; д) $\cos 3$ в порядке возрастания.	1) а, в, б, д, г; 2) г, б, в, а, д; 3) б, г, а, д, в; 4) г, д, б, в, а; 5) д, г, в, б, а.
7.	Найдите наибольшее значение выражения $3\sin 2\beta$.	1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 6; 5) 8.
8.	Найдите наименьшее значение выражения $5\cos\alpha - 4$.	1) –1; 2) –5; 3) –4; 4) –9; 5) 0.
9.	Найдите наибольшее значение выражения $7 - \lvert\cos\alpha\rvert$.	1) –1; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
10.	Найдите сумму всех целых значений (или значение, если оно одно) выражения $\sin^2\alpha - 3{,}5$.	1) –3; 2) –5; 3) –7; 4) –9; 5) 0.
11.	Упростите выражение $(\sqrt{\sin^2\alpha} + 2\sin\alpha)\cdot\lvert\operatorname{ctg}\alpha\rvert$, зная, что $-180° < \alpha < -90°$.	1) $3\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $-3\cos\alpha$; 4) $-\cos\alpha$; 5) $\sin\alpha$.
12.	Упростите выражение $\lvert\cos\alpha\cdot\sin\alpha\rvert\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos^2(-\alpha)$, зная, что $3\pi < \alpha < \frac{7\pi}{2}$.	1) $\cos 2\alpha$; 2) 1; 3) $-\cos 2\alpha$; 4) –1; 5) $\sin\alpha$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
13.	Вычислить $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-2\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}$.	1) 1; 2) 3; 3) 3^{-1}; 4) 4; 5) 5.
14.	Вычислить $\sqrt{3}\operatorname{tg}30^\circ+\sqrt{2}\sin 135^\circ-4\cos 240^\circ$.	1) 4; 2) 0; 3) –1; 4) 2; 5) 1.
15.	Вычислить $\frac{\operatorname{ctg}315^\circ-6\sin 510^\circ}{\sin^2 19^\circ+\sin^2(-71^\circ)}$.	1) 1; 2) 4; 3) –2; 4) 2; 5) –4.
16.	Вычислить $\left(\cos\frac{11\pi}{6}-\sin\frac{31\pi}{4}\right)^2+\operatorname{tg}\frac{8\pi}{3}\cdot\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)-\sin^2\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$.	1) 1; 2) 1,5; 3) $\sqrt{6}$; 4) $1{,}5+\sqrt{6}$; 5) $1+\sqrt{6}$.
17.	Вычислить $\sin^2 73^\circ(1+\operatorname{tg}^2 17^\circ)-2\operatorname{tg}15^\circ\cdot\operatorname{tg}75^\circ$.	1) 1; 2) –1; 3) –2; 4) 2; 5) 3.
18.	Вычислить $\frac{4}{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}-\operatorname{ctg}405^\circ}+2\operatorname{ctg}\frac{35\pi}{6}$.	1) 1; 2) $4\sqrt{3}$; 3) –2; 4) 2; 5) $4\sqrt{3}+2$.
19.	Вычислить $\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{11\pi}{3}-6\cos 210^\circ}$.	1) 0,5; 2) 0,25; 3) –0,5; 4) –0,25; 5) 0,3.
20.	Упростить выражение $\frac{2-3\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha-1}+\operatorname{tg}^2\alpha$.	1) 1; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 5) $\sin^2\alpha$.
21.	Вычислить $4\sqrt{3}\sin 15^\circ\cos\frac{\pi}{12}$.	1) 1; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) 2; 5) 3.
22.	Упростить: $\left(\frac{\sin 16^\circ}{2\cos^2 4^\circ-2\sin^2 4^\circ}\right)^2+4\sin^2 41^\circ\cos^2 41^\circ$.	1) 1; 2) 4; 3) 2; 4) 5; 5) 3.
23.	Вычислить $\left(\cos\frac{7\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(\sin\frac{7\pi}{8}-\cos\frac{9\pi}{8}\right)$.	1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) –1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
24.	Вычислить $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{2-2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.	1) –0,5; 2) 0,25; 3) 0; 4) 0,5; 5) 0,75.
25.	Вычислить $4\cos 75^\circ$.	1) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; 2) 2; 3) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$; 4) 4; 5) 1.
26.	Вычислить $\sqrt{2}(\sin 34^\circ\cos(-11^\circ)+\sin 169^\circ\cos 34^\circ)+\sqrt{3}\cdot\frac{\operatorname{tg}62^\circ-\operatorname{tg}2^\circ}{1+\operatorname{tg}62^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ}$.	1) 1; 2) 4; 3) 2; 4) 5; 5) 3.
27.	Вычислить $\frac{(\sin 19^\circ+\sin 289^\circ)(\cos 109^\circ-\cos 379^\circ)}{4\cos 154^\circ\cos 296^\circ}$.	1) 2,5; 2) –0,25; 3) 0,25; 4) 0,5; 5) –0,5.
28.	Упростить $\frac{1-2\sin^2 39^\circ-\cos 18^\circ}{\sin 48^\circ}$.	1) 1; 2) –2; 3) 2; 4) $\operatorname{ctg}48^\circ$; 5) –1.
29.	Найти значение выражения $\frac{\sin 8\alpha+2\sin 4\alpha}{1-\cos^2 4\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}2\alpha=-0{,}5$.	1) –4; 2) 4; 3) 0,25; 4) –0,25; 5) –1.
30.	Вычислить $\sin 15^\circ-\cos 15^\circ$.	1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 0; 5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
31.	Найти значение выражения $\sqrt{5}\operatorname{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, угол α принадлежит III четверти.	1) –15; 2) –16; 3) 20; 4) $-4\sqrt{5}$; 5) –20.
32.	Найти значение выражения $50\sin\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, $\pi<\alpha<2\pi$.	1) –24; 2) –48; 3) $\frac{24}{25}$; 4) $-\frac{24}{25}$; 5) 48.
33.	Найти значение выражения $10\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	1) $4\sqrt{3}$; 2) $3-4\sqrt{3}$; 3) –3; 4) $4\sqrt{3}-3$; 5) 5.
34.	Найти значение выражения $2\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.	1) 14,5; 2) –14,5; 3) 29; 4) –29; 5) 58.
35.	Найти значение выражения $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=(2\sqrt{3})^{-1}$.	1) 2,5; 2) –3,5; 3) –2,5; 4) 3,5; 5) 0,5.
36.	Найти значение выражения $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{8}$, если $\cos\frac{\alpha}{4}=-\frac{1}{4}$, $\frac{\alpha}{4}\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.	1) $-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 3) –3; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{3}$.
37.	Вычислить $2\sin165°$.	1) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; 3) $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 4) $-\sqrt{2+\sqrt{3}}$; 5) 0,15.
38.	Найти значение выражения $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}$.	1) 1; 2) –1; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 5; 5) $\frac{5}{6}$.
39.	Найти значение выражения $\sqrt{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}2\alpha=0{,}75$.	1) 0,8; 2) –0,8; 3) –0,6; 4) 0,6; 5) 0,5.
40.	Найти значение выражения $25\sin^2(90°-3\alpha)-10\cos3\alpha+1$, если $\sin1{,}5\alpha=0{,}8$.	1) 20,8; 2) 5,76; 3) 10,6; 4) 12,6; 5) 26,5.
41.	Найти $3\cdot\frac{\sin3\alpha+\sin5\alpha}{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, если $\cos4\alpha=\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg}4\alpha<0$.	1) 15; 2) 5; 3) –5; 4) –15; 5) $\sqrt{11}$.
42.	Найти значение выражения $\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=0{,}25$.	1) 1; 2) $\frac{33}{32}$; 3) $\frac{29}{32}$; 4) $\frac{31}{32}$; 5) $\frac{23}{32}$.
43.	Если известно, что $0<\alpha<2\pi$, $\operatorname{tg}\alpha>0$ и верно равенство $2\sin^2\alpha-7\sqrt{3}\sin\alpha-12=0$, то угол α (в градусах) равен:	1) 300; 2) 240; 3) 210; 4) 120; 5) 60.
44.	Если известно, что $-360°<\alpha<0°$, $\cos\alpha>0$ и верно равенство $3\operatorname{tg}^2\alpha-2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha+1=0$, то угол α (в градусах) равен:	1) –30; 2) –60; 3) –120; 4) –300; 5) –330.
45.	Найти $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin2\alpha=\frac{1}{3}$.	1) 1; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{6}$.
46.	Найти значение выражения $\frac{2\cos3\beta\cos7\beta-\cos10\beta}{2\cos^2(225°-2\beta)-1}$, если $\beta=\frac{\pi}{16}$.	1) –1; 2) $\sqrt{3}$; 3) 1; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $(\sqrt{3})^{-1}$.
47.	Найти $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\beta=0{,}5$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3$.	1) 1; 2) $\frac{1}{7}$; 3) 0,2; 4) 5; 5) 7.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
48.	Упростить выражение $\sin(130^\circ - \alpha)\cos(140^\circ + \alpha) - \sin 210^\circ \cdot \sin(10^\circ + 2\alpha)$.	1) –0,5; 2) $\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 0,5; 5) –1.
49.	Найти наименьший положительный период функции $f(x) = \sin^2\frac{x}{8} - \cos^2\frac{x}{8}$.	1) 2π; 2) $0{,}125\pi$; 3) 4π; 4) $0{,}25\pi$; 5) 8π.
50.	Найти наименьший положительный период функции $f(x) = (\sin \pi x + \cos \pi x)^2$.	1) 2π; 2) π; 3) 4π; 4) 1; 5) 2.
51.	Найти сумму чисел, принадлежащих промежутку $[-8; -1]$ являющихся периодами функции $f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)$.	1) –16; 2) –18; 3) –20; 4) –2; 5) –6.
52.	Укажите множество значений функции $f(x) = 4\cos 3x\cos 5x - 2\cos 2x + 11$.	1) $[-11; 3]$; 2) $[9; 11]$; 3) $[-2; 2]$; 4) $[9; 13]$; 5) $[-9; -7]$.
53.	Наибольшее значение функции $f(x) = 4\sin 2x + 4\sqrt{3}\cos 2x$ равно:	1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) $4\sqrt{3}$; 5) 8.
54.	Наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{13}\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - 7$ равно:	1) –11; 2) –7; 3) $-\sqrt{13}$; 4) $-\sqrt{13} - 7$; 5) –6.
55.	Областью значений функции $f(x) = \frac{18}{3\sin x + 6}$ является множество:	1) $[3; 9]$; 2) $[2; 3]$; 3) $[2; 6]$; 4) $[9; 13]$; 5) $[1; 3]$.
56.	Областью значений функции $f(x) = 4\cos^2 x - 4\cos x + 1$ является множество:	1) $[1; 3]$; 2) $[0; 3]$; 3) $[1; 9]$; 4) $[0; 9]$; 5) $[-3; 1]$.
57.	Областью значений функции $f(x) = 2 + 4\sin x - \cos^2 x$ является множество:	1) $[1; 6]$; 2) $[0; 9]$; 3) $[-3; 0]$; 4) $[0; 3]$; 5) $[-2; 6]$.

15. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a *(arcsin a)*, где $|a| \le 1$, называют угол α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу a. Верны равенства: $\sin(\arcsin a) = a$, $|a| \le 1$; $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Арккосинусом числа a *(arccos a)*, где $|a| \le 1$, называют угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен числу a. Верны равенства: $\cos(\arccos a) = a$, $|a| \le 1$; $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$, $a \in [0; \pi]$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Арктангенсом числа a *(arctg a)*, где $a \in R$, называют угол α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу a. Верны равенства: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$, $a \in R$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$, $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Арккотангенсом числа a *(arcctg a)*, где $a \in R$, называют угол α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен числу a. Верны равенства: $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$, $a \in R$; $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$, $a \in (0; \pi)$, $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Пример. Вычислить $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Обозначим $\operatorname{arcctg}(-\frac{1}{2}) = \beta$. Тогда по определению: $\beta \in (0; \pi)$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{2}$. Так как $\operatorname{ctg}\beta < 0$, то делаем вывод о том, что $\beta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

Пусть $\arccos\frac{2}{5\sqrt{5}} = \alpha$. Тогда по определению: $\alpha \in [0; \pi]$, $\cos\frac{2}{5\sqrt{5}}$. Так как $\cos\alpha > 0$, то делаем вывод о том, что $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.

После введенных обозначений задача формулируется так: найти $\sin(\alpha + \beta)$, где $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{2}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}$.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ и необходимо найти $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$.

Для этого используем основные тригонометрические тождества:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$ (знак «+» перед корнем поставили потому, что α — угол I четверти);

б) $1 + \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (знак «+» перед корнем поставили потому, что β — угол II четверти);

в) $\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (знак «–» перед корнем поставили потому, что β — угол II четверти).

Тогда искомая величина равна: $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{11}{5\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{7}{25}$.

Ответ: $-\frac{7}{25}$.

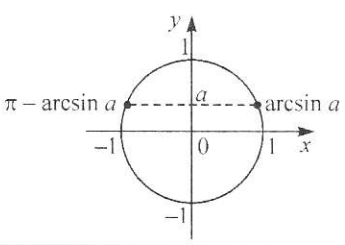
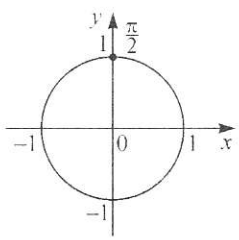
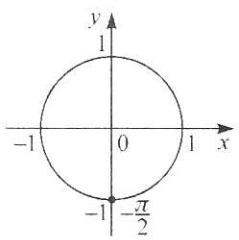
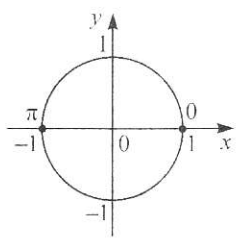
№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Какое из выражений: а) $\arccos(-0{,}8)$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$; в) $\operatorname{arctg} 2$; г) $\arccos(\sqrt{5}-1)$; д) $\arcsin(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ не имеет смысла?	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
2.	Какому из чисел: а) $\frac{2\pi}{7}$; б) $\frac{7\pi}{9}$; в) $\frac{13\pi}{11}$; г) π; д) $\frac{\pi}{12}$ не может быть равен арккосинус?	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
3.	Какому из чисел: а) $\frac{2\pi}{7}$; б) $\frac{7\pi}{9}$; в) $\frac{3\pi}{11}$; г) $-\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{2}$ не может быть равен арксинус?	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
4.	Найти в градусах значение выражения $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.	1) 45; 2) 90; 3) 60; 4) –135; 5) –90.
5.	Найти в градусах значение выражения $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin\frac{1}{2} - \arccos 1$.	1) 0; 2) –90; 3) 90; 4) 180; 5) –180.
6.	Выбрать верное утверждение: а) $\arccos\frac{1}{4} < \arccos\frac{2}{3}$; б) $\arcsin 1 + \arccos(-1) = \pi$; в) $\operatorname{arctg}(-2) < \operatorname{arctg} 4$; г) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) > \arcsin\frac{2}{3}$; д) $\operatorname{arctg}(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
7.	Вычислить $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.	1) 0; 2) –1; 3) –0,5; 4) 0,5; 5) 1.
8.	Вычислить $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\arccos(-1) + \operatorname{arcctg}\sqrt{3})$.	1) 0; 2) –1; 3) –3; 4) 3; 5) 1.
9.	Значение выражения $\arcsin(\sin 98°)$ в градусах равно:	1) 98; 2) 8; 3) 82; 4) 78; 5) –82.
10.	Значение выражения $\arcsin(\sin 312°)$ в градусах равно:	1) 48; 2) –48; 3) 132; 4) 312; 5) –132.
11.	Значение выражения $\arccos(\cos 214°)$ в градусах равно:	1) 214; 2) 34; 3) –34; 4) 24; 5) 146.
12.	Значение выражения $\arccos(\cos 275°)$ в градусах равно:	1) 5; 2) 95; 3) –5; 4) 85; 5) –85.
13.	Значение выражения $\arcsin(\cos 303°)$ в градусах равно:	1) 57; 2) 33; 3) –33; 4) –57; 5) 47.
14.	Значение выражения $\arccos(\sin(-412°))$ в градусах равно:	1) 38; 2) 52; 3) –38; 4) –52; 5) 142.
15.	Вычислить $\sin(\arcsin 0{,}25)$.	1) 0; 2) –1; 3) –0,25; 4) 0,25; 5) 1.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
16.	Вычислить $20\cos(\arcsin 0{,}6)$.	1) 16; 2) –16; 3) 12; 4) –12; 5) 10.
17.	Вычислить $9\sin\left(\arccos\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$.	1) 1; 2) 3; 3) $2\sqrt{2}$; 4) –3; 5) $\frac{1}{3}$.
18.	Вычислить $4\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$.	1) 1; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 4) –2; 5) 2.
19.	Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}4\right)$.	1) 4; 2) –4; 3) 0,25; 4) –0,25; 5) –5.
20.	Вычислить $8\cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$.	1) 0,4; 2) –1; 3) 0,125; 4) –0,125; 5) 1.
21.	Вычислить $85\sin\left(\operatorname{arctg}0+\arcsin\left(-\frac{8}{17}\right)\right)$.	1) $\frac{15}{17}$; 2) $-\frac{15}{17}$; 3) 75; 4) –75; 5) 60.
22.	Вычислить $\sqrt{5}\cos\left(0{,}5\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$.	1) $-\sqrt{\frac{4}{5}}$; 2) $\sqrt{\frac{4}{5}}$; 3) 2; 4) –2; 5) 0,8.
23.	Вычислить $130\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+\arcsin\frac{5}{13}\right)$.	1) 112; 2) –112; 3) –33; 4) 32; 5) –32.
24.	Вычислить $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}(-0{,}5))$.	1) 4; 2) –1; 3) 8; 4) –8; 5) 1.
25.	Вычислить $(3-2\sqrt{2})\cdot\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.	1) 3; 2) –1; 3) –2; 4) 2; 5) 1.
26.	Вычислить $\sin(\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}3)$.	1) $\frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{10}}$; 2) 0,5; 3) $\frac{3\sqrt{3}-1}{2\sqrt{10}}$; 4) –1; 5) $\frac{3\sqrt{3}+1}{4\sqrt{10}}$.

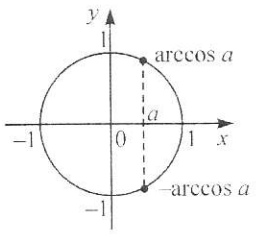
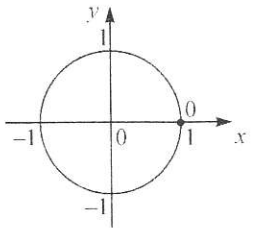
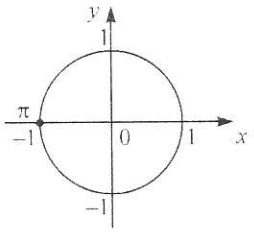
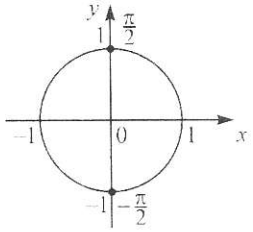
16. Тригонометрические уравнения

16.1. Простейшие уравнения

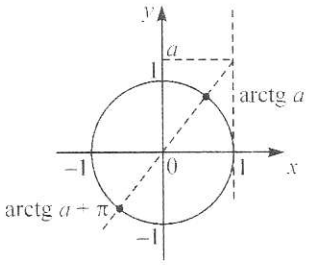
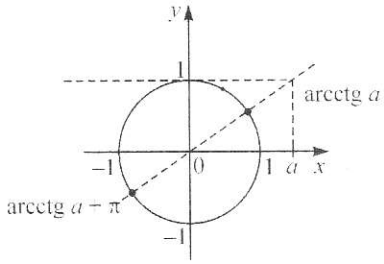
1) $\sin x = a$ имеет решение только при $|a| \le 1$.

$\sin x = a$	$\sin x = 1$	$\sin x = -1$	$\sin x = 0$
при $\lvert a\rvert<1$, $a \neq 0$ $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$ или: $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi m,\ m \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi l,\ l \in Z \end{array}\right.$ 	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ 	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ 	$x = \pi n$, $n \in Z$ 

2) $\cos x = a$ имеет решение только при $|a| \le 1$.

$\cos x = a$	$\cos x = 1$	$\cos x = -1$	$\cos x = 0$
при $\lvert a\rvert < 1$, $a \neq 0$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$	$x = 2\pi n$ $n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$
			

3) $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ имеют решения при любом действительном a и их решения определяются по формулам:

$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$
	

16.2. Методы решения тригонометрических уравнений

Существует много *приемов решения тригонометрических уравнений*. Перечислим некоторые из них:

1) Разложение на множители.

2) Замена переменной: а) в уравнениях, приводимых к квадратным; б) в однородных уравнениях второй степени относительно выражений $\sin x$ и $\cos x$; в) в уравнениях, содержащих выражения $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cdot \cos x$ часто применяют замену $y = \sin x \pm \cos x$.

3) Использование различных формул тригонометрии для сведения уравнения к простейшему.

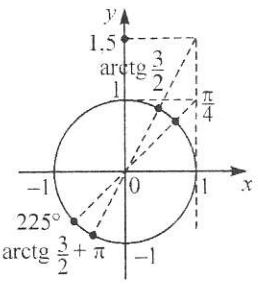
4) Введение вспомогательного аргумента.

5) Уравнения, решаемые с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

6) Применение ограниченности тригонометрических функций.

Пример 1. Найти число решений уравнения $\sin^2 x + 1{,}5\cos^2 x = 1{,}25\sin 2x$ на промежутке $[0°; 225°]$.

Решение. Используя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение в виде: $\sin^2 x + 1{,}5\cos^2 x - 2{,}5\sin x\cos x = 0$. Это однородное уравнение второй степени, которое решается делением обеих частей уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. Получим $\operatorname{tg}^2 x - 2{,}5\operatorname{tg} x + 1{,}5 = 0$, равносильное совокупности: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}.\end{array}\right.$ Решая каждое из уравнений, получим: $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\\ x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in Z\end{array}\right.$. Изобразим найденные корни на единичной окружности и выберем те из них, которые принадлежат промежутку $[0°; 225°]$.



Это: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: 3.

Пример 2. Найти наименьший корень уравнения $4(\cos x - \sin x) = 4 - \sin 2x$ на промежутке $\left[-3\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Выполним замену переменной по формуле $y = \cos x - \sin x$. Тогда $\sin 2x = 1 - (\cos x - \sin x)^2 = 1 - y^2$. Тогда уравнение примет вид: $4y = 4 - (1 - y^2)$, $y^2 - 4y + 3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x = 1,\\ \cos x - \sin x = 3;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней, так как $\frac{3\sqrt{2}}{2} > 1$. Решаем первое уравнение:

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n \in Z,\\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.\end{array}\right.$$

Найдем, при каких значениях n и m соответственно корни уравнения попадают в требуемый промежуток:

$-3\pi \le 2\pi m \le -\frac{\pi}{2}, \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le n \le -\frac{1}{4}$. На промежутке $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right]$ одно целое число $n = -1$, и искомый корень $x_1 = -2\pi$.

Рассмотрим вторую серию корней: $-3\pi \le -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \le -\frac{\pi}{2}, \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \le m \le 0$, значит $m = -1$, $m = 0$. Получим два корня: $x_2 = -\frac{5\pi}{2}$, $x_3 = -\frac{\pi}{2}$. Из трех найденных корней $x_2 = -\frac{5\pi}{2}$ — наименьший.

Ответ: $-\frac{5\pi}{2}$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Из чисел: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{4\pi}{3}$ выберите корень уравнения $\cos(270° - x) = \frac{1}{2}$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
2.	Из чисел: а) π; б) 450°; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $-\frac{3\pi}{2}$; д) $\frac{7\pi}{2}$ выберите корень уравнения $\sin(\pi - x) = -1$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
3.	Из чисел: а) $\frac{\pi}{4}$; б) -4π; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) 450°; д) $\frac{2\pi}{3}$ выберите корень уравнения $\cos^4\frac{x}{2} = \sin^4\frac{x}{2}$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
4.	Из чисел: а) 300°; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{4\pi}{3}$; д) $\frac{7\pi}{6}$ выберите корень уравнения $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
5.	Определить количество корней уравнения $4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ на отрезке $[0; 3\pi]$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
6.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $4\cos^2\frac{x}{2} = 1$, принадлежащих отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.	1) 180; 2) 240; 3) 360; 4) 450; 5) 0.
7.	Найти среднее арифметическое (в градусах) корней уравнения $\cos 2x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$, принадлежащих промежутку (–90°; 450°).	1) 180; 2) 240; 3) 360; 4) 150; 5) 720.
8.	Найти среднее арифметическое (в градусах) корней уравнения $2 + \sqrt{3}\cos(270° + x) = 2\cos^2 x$, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.	1) 170; 2) 180; 3) 360; 4) 450; 5) 600.
9.	Определить количество корней уравнения $\sin 5x\cos 3x + \sin\left(\frac{7\pi}{2} - 5x\right)\sin 3x = 0{,}5$ на отрезке [90°; 585°].	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
10.	Определить количество корней уравнения $2\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}$ на отрезке $[0; 5\pi]$.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
11.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2=0$ на отрезке $\left[-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.	1) 160; 2) 210; 3) 270; 4) 300; 5) 320.
12.	Определить количество корней уравнения $2\cos^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+6\cos^2\left(\frac{x}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=2$ на отрезке $[0;\ 12\pi]$.	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
13.	Определить количество корней уравнения $\frac{\cos(270°+x)-\sin^2 3-\cos^2 3}{1-2\sin^2\frac{x}{2}}=0$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) нет корней.
14.	Определить количество корней уравнения $\frac{\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x+\sin x\cos^2 x-1}=0$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) нет корней.
15.	Определить количество корней уравнения $\frac{\operatorname{tg}^2 x-1}{4x^2+3\pi x-\pi^2}=0$ на отрезке $[0°;\ 360°]$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) нет корней.
16.	Определить количество корней уравнения $\frac{4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}-1}{3x^2-4\pi x+\pi^2}=0$ на отрезке $[0;\ 5\pi]$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) нет корней.
17.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $\sqrt{\pi x-x^2}\,(2\cos^3 x+\cos^2 x-\cos x)=0$.	1) 180; 2) 210; 3) 270; 4) 330; 5) 360.
18.	Определить количество корней уравнения $\frac{\sqrt{3}+2(\sin x+\cos x)^2-2}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}=0$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
19.	Определить наименьший корень уравнения $3\sin^2 x+5\sin x\cos x-4=0$ на отрезке $[-180°;\ 0°]$.	1) $-\pi$; 2) $-90°$; 3) $-135°$; 4) $\operatorname{arctg}4-\pi$; 5) $-160°$.
20.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $2\sin^2 2x+(1-\sqrt{3})\sin 4x-2\sqrt{3}\cos^2 2x=0$ на отрезке $[0°;\ 225°]$.	1) 585; 2) 600; 3) 570; 4) 540; 5) 360.
21.	Найти среднее арифметическое (в градусах) корней уравнения $(\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x-1)\sqrt{9-x^2}=0$.	1) 12; 2) 24; 3) 36; 4) 20; 5) 18.
22.	Найдите значение выражения $n\cdot x_0$, где n — количество, а x_0 — наибольший корень (в градусах) уравнения $(\operatorname{tg}x-3\operatorname{ctg}x)\sqrt{\cos x}=0$ из промежутка $[-90°;\ 180°]$.	1) 120; 2) 240; 3) 480; 4) 960; 5) 450.
23.	Определить количество корней уравнения $\sqrt{2\sin x-1}(\cos 5x+\cos 3x)=0$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
24.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-\frac{3}{\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}}+3=0$, на отрезке $[-\pi;\ 3\pi]$.	1) 360; 2) 450; 3) 720; 4) 960; 5) 1080.
25.	Найти среднее арифметическое корней уравнения $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{2}-\frac{1+\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}+\sqrt{2}+1=0$ на отрезке $[-5;\ 1]$.	1) -4; 2) -5; 3) $-1{,}5$; 4) $-7{,}5$; 5) $-1{,}8$.
26.	Определить количество корней уравнения $\sin 5x-\sin 7x=\cos^2 3x-\sin^2 3x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
27.	Найти сумму корней (в радианах) уравнения $\sin(2x-2)=\sin 2x-\sin 2$, принадлежащих отрезку $[0;\ 2\pi]$.	1) $3\pi-2$; 2) $4\pi+2$; 3) 2; 4) 4; 5) 2π.

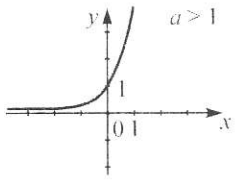
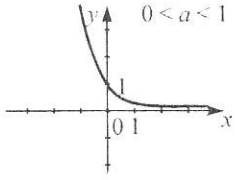
№ п/п	Задания	Варианты ответов
28.	Найти сумму корней (в радианах) уравнения $\sin 2x - 2\cos 2\sin x + \cos x - \cos 2 = 0$, принадлежащих отрезку $[-\pi; 2\pi]$.	1) 2; 2) 4; 3) $4\pi - 2$; 4) $4\pi + 2$; 5) 2π.
29.	Найти сумму корней уравнения $4\sin 2\pi x \cos^2 2\pi x + 1 + \sin 4\pi x + 2\cos 2\pi x = 0$, принадлежащих отрезку $[-1; 2]$.	1) 4; 2) 5; 3) 6,5; 4) 8; 5) 6,75.
30.	Определить количество корней уравнения $\sin 3x - \cos 3x = (\sqrt{2})^{-1}$ на отрезке $[0; \pi]$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
31.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{4} + 2\sin^2 2 + 2\cos^2 2 = 0$, принадлежащих отрезку $[0; 7]$.	1) 180; 2) 210; 3) 270; 4) 360; 5) 960.
32.	Найти сумму корней (в радианах) уравнения $\sin^2 6x + \cos^2 5x = 1$, принадлежащих отрезку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.	1) $\frac{\pi}{11}$; 2) $\frac{2\pi}{11}$; 3) $\frac{3\pi}{11}$; 4) $\frac{6\pi}{11}$; 5) $\frac{10\pi}{11}$.
33.	Определить количество различных корней уравнения $\cos^2 4x + \cos^2 7x + \cos^2 5x + \cos^2 2x = 2$, принадлежащих отрезку $[0°; 90°]$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
34.	Найти среднее арифметическое (в градусах) корней уравнения $\cos 2x = \sin(\frac{5\pi}{2} + x) + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, принадлежащих отрезку $[-270°; 270°]$.	1) 7,5; 2) 9; 3) 15; 4) 45; 5) 55.
35.	Найдите значение выражения $n \cdot x_0$, где n — количество, а x_0 — наибольший корень (в радианах) уравнения $\sin 4x \sin x + \cos 5x = 0$ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.	1) $\frac{5\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{15\pi}{4}$; 5) $\frac{15\pi}{8}$.
36.	Определить количество корней уравнения $\sin 2x - (\sqrt{2}+1)(\sin x + \cos x) + \sqrt{2} + 1 = 0$, принадлежащих отрезку $[-6; 6]$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
37.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $2\cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x + \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x - 5 = 0$, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$.	1) –60; 2) –30; 3) 0; 4) 30; 5) 60.
38.	Найти среднее арифметическое (в градусах) корней уравнения $\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{18} \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{9} - \sin 2x$, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$.	1) –45; 2) –60; 3) –30; 4) 30; 5) 60.
39.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $\cos^4(x + \frac{\pi}{4}) + \sin^4(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}$ на отрезке $[-2; 2]$.	1) –30; 2) 0; 3) 30; 4) 60; 5) –15.
40.	Определить количество корней уравнения $\cos^6(\pi - 2x) + \sin^6 2x = \frac{13}{16}$ на отрезке $[-45°; 45°]$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
41.	Определить количество корней уравнения $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{7\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{12} - 11x\right) = 0$, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right]$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
42.	Найти среднее арифметическое (в радианах) корней уравнения $\lvert\sin x\rvert + \sin 2x = 0$, принадлежащих отрезку $[-\pi; 2\pi]$.	1) $\frac{5\pi}{7}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{4\pi}{7}$; 5) π.
43.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $\cos x = \sqrt{1 - \cos^2\frac{x}{2}}$ на отрезке $[-2\pi; \pi]$.	1) –360; 2) –300; 3) –240; 4) –60; 5) 0.
44.	Найти сумму корней (в градусах) уравнения $\sqrt{2}\cos x = \sqrt{1 - \cos x}$, принадлежащих отрезку $[-90°; 360°]$.	1) 360; 2) 180; 3) 240; 4) 210; 5) 300.
45.	Найти сумму (в градусах) корней уравнения $\sqrt{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1} = \sqrt{6}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}\cos(270° - x)$, принадлежащих отрезку $[-\pi; 2\pi]$.	1) 360; 2) 300; 3) 240; 4) 450; 5) 510.

17. Преобразование показательных и логарифмических выражений. Свойства показательной и логарифмической функций

17.1. Показательная функция

Функция, заданная формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется **показательной** с основанием a.

Основные свойства и график показательной функции

1) Область определения: R. 2) Область значений: $R_+ = (0; +\infty)$. 3) Не является ни четной, ни нечетной.	4) Не имеет нулей. 5) $y > 0$ при $x \in R$. 6) Функция не имеет экстремумов.
7) Функция возрастает при всех $x \in R$ при $a > 1$. 8) Если $a > 1$, то график функции имеет вид: 	7) Функция убывает при всех $x \in R$ при $0 < a < 1$. 8) Если $0 < a < 1$, то график функции имеет вид: 

17.2. Определение и свойства логарифмов

Логарифмом числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$ (логарифм числа b по основанию a). Из определения следует, что $\begin{cases} \log_a b = c, \\ a > 0, a \neq 1, \\ b > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^c = b, \\ a > 0, a \neq 1, \\ b > 0. \end{cases}$ а также верно равенство: $\boxed{a^{\log_a b} = b}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, которое называется *основным логарифмическим тождеством*.

Десятичным называется логарифм по основанию 10 и обозначается lg.

Свойства логарифмов (при условии, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$):

1) $\log_a 1 = 0$ — логарифм единицы равен нулю;

2) $\log_a a = 1$ — логарифм от основания равен 1;

3) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ — логарифм произведения равен сумме логарифмов;

4) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ — логарифм частного равен разности логарифмов;

5) а) $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$; б) $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b$; в) $\log_{a^p} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$;

6) $a^{\log_c c} = c^{\log_c a}$ $(b \neq 1)$;

7) а) $\log_c b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ — формула перехода к новому основанию $(c \neq 1)$;

б) $\log_c b = \frac{1}{\log_b a}$ $(b \neq 1)$.

Часто при упрощении выражений, содержащих логарифмы, решении логарифмических уравнений и неравенств свойствами 3—4 надо пользоваться осторожно, так как их применение может изменить область допустимых значений переменной. Так в равенстве $\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$ левая часть определена при тех значениях x, при которых значения функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый знак (как положительный, так и отрицательный), а правая часть определена только если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$!

Аналогичные проблемы могут возникнуть и при использовании формулы 5, если p — четное целое число. Поэтому наряду со свойствами 3—5 рассматривают также аналогичные свойства 3*—5* при условиях, что $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) \cdot g(x) > 0$, $b \neq 0$:

3*) $\log_a(f(x) \cdot g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$;

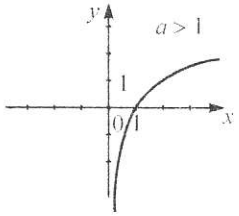
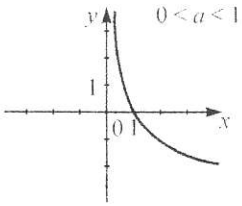
4*) $\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$;

5*) $\log_a b^{2p} = 2p \cdot \log_a|b|$, где $p \in Z$.

17.3. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией с основанием a называется функция, заданная формулой $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Основные свойства и график логарифмической функции

1) Область определения: $R_+ = (0; +\infty)$. 2) Область значений: R. 3) Не является ни четной, ни нечетной.	4) Нуль функции: $x = 1$. 5) Функция не имеет экстремумов.
6) $y > 0$ при $x > 1$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$, если $a > 1$. 7) Функция возрастает при всех $x \in R_+$ при $a > 1$. 8) Если $a > 1$, то график функции имеет вид:  	6) $y > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y < 0$ при $x > 1$, если $0 < a < 1$. 7) Функция убывает при всех $x \in R_+$ при $0 < a < 1$. 8) Если $0 < a < 1$, то график функции имеет вид: 

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Результатом упрощения выражения $\frac{(2^x)^2 + 3 \cdot 4^x - 8 \cdot 4^{x-1}}{2^x}$ является:	1) 2^{2x}; 2) 4^{x-1}; 3) 2^x; 4) 2^{x-1}; 5) 4^x.
2.	Результатом упрощения выражения $\frac{4(2 \cdot 3^x)^x - 3 \cdot (3\sqrt{2})^{2x} + 2^x \cdot 81^{\frac{x}{2}}}{2^{x-1}}$ является:	1) 3^{2x-1}; 2) 9^{x-1}; 3) 3^{1-x}; 4) 9^x; 5) $2 \cdot 3^{x-1}$.
3.	Результатом упрощения выражения $2\left(\frac{3^{2x}}{3} - 18 \cdot 3^{2x-3}\right) + \frac{4}{3} \cdot 9^x$ является:	1) $2 \cdot 3^{2x-1}$; 2) 6^{2x-1}; 3) 3^{2x}; 4) 9^{x-1}; 5) $2 \cdot 3^{x-1}$.
4.	Результатом упрощения выражения $(\sqrt{2})^{4x+8} - 3 \cdot 4^{x+1} + 2^{2x}$ является:	1) 2^{2x}; 2) $5 \cdot 4^x$; 3) 4^x; 4) 4^{x-1}; 5) $3 \cdot 4^x$.
5.	Результатом упрощения выражения $\frac{(\sqrt[4]{10^x})^x \cdot (\sqrt{10})^{2x} \cdot 0{,}001^{-x}}{(4{,}5 + 5{,}5)^{2-x} \cdot 0{,}01}$ является:	1) 10^{2x}; 2) 100^{2x}; 3) 10^{6x}; 4) 10^{2x+1}; 5) 1000^x.
6.	Вычислить $\log_4 8 - \log_9 3 + 2\log_{\sqrt{5}} 125$.	1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 14; 5) 15.
7.	Вычислить $\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{16} + \log_8 16 - 2\log_6 \sqrt[3]{6} + \log_{2\sqrt{2}} \sqrt{2}$.	1) 1; 2) –1; 3) 3; 4) 4; 5) –2.
8.	Вычислить $\lg 8 + \lg 5 + \lg 2{,}5$.	1) 2; 2) –1; 3) 3; 4) 1; 5) –2.
9.	Вычислить $\log_2 9 - \log_2 5 + \log_{0{,}5} 1{,}8$.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2; 5) –2.
10.	Вычислить $\frac{\log_2 125}{\log_2 0{,}2}$.	1) 1; 2) –2; 3) 3; 4) 2; 5) –3.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
11.	Вычислить $\frac{\log_5 \sqrt[4]{2}}{\log_5 4}$.	1) 8; 2) 0,125; 3) 4; 4) 0,25; 5) –2.
12.	Вычислить $\frac{2-\lg 25}{\lg 8}$.	1) 1,5; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) –0,25.
13.	Вычислить $\frac{1}{\log_3 2}+\frac{2}{\log_9 4}-\frac{3}{\log_{27} 8}$.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2; 5) –2.
14.	Вычислить $\lg 2 \cdot \log_8 100 \cdot \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{8}$.	1) 1000; 2) 1; 3) 10; 4) 0,001; 5) 0,25.
15.	Вычислить $2^{\log_2 24-3}+36^{\log_6 2}-3^{-2\log_3 2}$.	1) 7,75; 2) 7; 3) 6; 4) 7,25; 5) 6,75.
16.	Вычислить $7^{\log_7 5}-2^{2\log_2 3}+\sqrt{3}^{\log_3 16}$.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2; 5) –2.
17.	Вычислить $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\sqrt[3]{2}} 8+\frac{8\lg\sqrt{2}}{\lg 4}-3^{1+\log_3 4}$.	1) –4; 2) –5; 3) 1; 4) 0; 5) –6.
18.	Вычислить $0{,}1^{\lg 5}-3^{\frac{2}{\log_2 3}+\log_6 \frac{1}{36}} \cdot (\sqrt[3]{9})^{4,5}+23 \cdot \log_{11} \sqrt[5]{\sqrt{11}}$.	1) –9; 2) –9,5; 3) 12; 4) –10,5; 5) –8.
19.	Вычислить $\frac{\log_{0,01} 324+\log_{\sqrt{10}} \sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\lg \frac{1}{27\sqrt{3}}}{\lg 15-\lg 5+2\lg \sqrt[4]{\frac{1}{27}}}$.	1) –5,5; 2) –5; 3) –4; 4) –3; 5) –1.
20.	Вычислить $\log_{25}(2-\sqrt{5})^2+3\log_{125}(\sqrt{5}+2)+\log_{\sqrt{5}}(-5)^4$.	1) –8; 2) 9; 3) 12; 4) 10; 5) 8.
21.	Вычислить $\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^4+10^{0,(3)\lg 8}+\frac{\log_2 6+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}}{\log_{0,5} 3\sqrt{2}}$.	1) –8; 2) –9; 3) –2; 4) –4; 5) –1.
22.	Вычислить $\left(\log_3 \frac{5}{81}+32\log_{405} 3\right) : \frac{\log_3^2 5+16}{\log_3^2 405}-\frac{1}{\log_{25} 9}$.	1) 4; 2) 2,5; 3) 3,75; 4) 6; 5) 1.
23.	Вычислить $5^{\lg 15} \cdot 2^{\lg 15}-0{,}8^{\frac{2}{\log_6 0,5}} \cdot 0{,}625^{-\frac{2}{\log_6 2}}$.	1) –21; 2) –9; 3) –12; 4) –10; 5) –14.
24.	Вычислить $\lg 0{,}03 \cdot \lg 300-\lg^2 3$.	1) –3; 2) –5; 3) –4; 4) –6; 5) –1.
25.	Вычислить $25^{0,5\log_5(5+2\sqrt{6})}+2^{\log_4(2\sqrt{6}-5)^2}$.	1) $10-4\sqrt{6}$; 2) 5; 3) $-4\sqrt{6}$; 4) $4\sqrt{6}$; 5) 10.
26.	Вычислить $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}+\sqrt{2}} 3}}-2\sqrt{2} \cdot 7^{\frac{1}{\log_{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} 49}}$.	1) $9-4\sqrt{6}$; 2) 3; 3) $-4\sqrt{6}$; 4) 9; 5) $4\sqrt{6}$.
27.	Вычислить $\log_2 1{,}25$, если $\log_2 5 = a$.	1) $a-2$; 2) $2a$; 3) $0{,}5a$; 4) $a+2$; 5) $2a-2$.
28.	Вычислить $\log_{49} 28$, если $\log_7 2 = a$.	1) $a-0{,}5$; 2) $2a$; 3) $0{,}5+a$; 4) $0{,}1a$; 5) $0{,}4a$.
29.	Вычислить $\log_9 31{,}25$, если $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$.	1) $a-b$; 2) $2a-b$; 3) $1{,}5b-a$; 4) $a+2b$; 5) $3b-a$.
30.	Из перечисленных функций: а) $y = \log_3 x$; б) $y = \log_{0,6} x$; в) $y = \log_\pi x$; г) $y = \log_{\frac{\pi}{2}} x$; д) $y = \log_{\sqrt{5}-1} x$ выбрать возрастающие на всей области определения.	1) а; 2) а, в; 3) а, в, г; 4) а, в, г, д; 5) а, в, д.
31.	Из перечисленных функций: а) $y = (\sqrt{3})^x$; б) $y = (\frac{\pi}{3})^x$; в) $y = (0{,}9)^x$; г) $y = (\sqrt{3}-1)^x$; д) $y = (\sqrt{1{,}01})^x$ выбрать убывающие на R.	1) в; 2) в, г; 3) а, в, г; 4) а, в, г, д; 5) а, в, д.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
32.	Среди точек $A(1; 8)$, $B(2; 3)$, $C(4; \frac{2}{3})$, $D(1; 0)$, $E(-8; -1)$ укажите те, которые принадлежат графику функции $y = \log_8 x$.	1) B, C, D; 2) C, D, E; 3) C, D; 4) A, B, C, D; 5) D, E.
33.	Среди точек $A(-1; -\frac{1}{2})$, $B(2; 0{,}25)$, $C(4; \frac{1}{32})$, $D(0; 0)$, $E(-2; 4)$ укажите те, которые принадлежат графику функции $y = (\frac{1}{2})^x$.	1) A, B, D; 2) B, D, E; 3) C, D, E; 4) A, B, E; 5) B, E.
34.	Сравнить $a = \log_6 30$ и $b = \log_{0,5} \frac{3}{16}$.	1) $a > b$; 2) $a < b$; 3) $a = b$; 4) нельзя сравнить.
35.	Сравнить $a = \log_3 \sqrt[3]{28}$ и $b = \log_3 2\sqrt{2}$.	1) $a > b$; 2) $a < b$; 3) $a = b$; 4) нельзя сравнить.
36.	Расположить числа: а) $\log_{\sqrt[4]{2\sqrt{2}}} \sqrt{7}$; б) $\log_{0,5} 0{,}(1)$; в) $\frac{1}{\log_6 4}$; г) $2\log_{0,5} \sqrt{3}$ в порядке возрастания.	1) а, б, в, г; 2) в, г, а, б; 3) г, в, б, а; 4) а, в, г, б; 5) г, в, а, б.
37.	Найти область определения функции $y = \log_5 (x^2 - 8x + 16)$.	1) $(4; +\infty)$; 2) R; 3) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; 4) $x = 4$; 5) $x = -4$.
38.	Найти область определения функции $y = \log_5 \frac{25 - x^2}{2x^2 + 7x - 15}$.	1) $(5; +\infty)$; 2) $(-5; 5)$; 3) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; 4) $(1{,}5; 5)$; 5) $(-5; 1{,}5)$.
39.	Найти множество значений функции $y = \log_{12} (x^2 - 4x + 16)$.	1) $[1; +\infty)$; 2) $(0; 1)$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $(1; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$.
40.	Найти множество значений функции $y = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 2x + 10)$.	1) $[-2; +\infty)$; 2) $(0; -2)$; 3) $(-\infty; -2]$; 4) $(2; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$.
41.	Найти множество значений функции $y = \log_{0,25} (-x^2 - 6x - 5)$.	1) $[-1; +\infty)$; 2) $(0; 4)$; 3) $(-\infty; -1]$; 4) $(-1; +\infty)$; 5) $(0; +\infty)$.
42.	Найти множество значений функции $y = 3^{\sin x}$.	1) $(-\infty; \frac{1}{3}]$; 2) $[\frac{1}{3}; 3]$; 3) $[3; +\infty]$; 4) $[-3; 3]$; 5) $(-3; +\infty)$.
43.	Найти множество значений функции $y = 4^{1-x^2}$.	1) $(-\infty; 4]$; 2) $[0; 4]$; 3) $[4; +\infty)$; 4) $[0; 1]$; 5) $(0; 4]$.

18. Показательные уравнения

Показательным называется **уравнение**, содержащее переменную только в показателе степени. Уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется простейшим показательным. Если $b > 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \log_a b$. Если $b \leq 0$, то уравнение не имеет корней.

Решение показательных уравнений основано на *свойстве степени*: две степени с одним и тем же положительным и отличным от единицы основанием равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Рассмотрим некоторые типы показательных уравнений и методы их решения.

Приведение обеих частей уравнения к общему основанию

Иногда удается записать показательное уравнение в виде $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Полученное уравнение при $a > 0$, $a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

В частности, уравнение $a^{f(x)} = 1$ при $a > 0$, $a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = 0$, так как $a^0 = 1$.

Вынесение общего множителя за скобки

Уравнения вида $A \cdot a^{f(x)} + B \cdot a^{f(x)+n} = C$ приводятся к простейшим путем вынесения за скобку общего множителя $a^{f(x)}$.

Замена переменной

а) Уравнения вида $A\cdot a^{2f(x)}+B\cdot a^{f(x)}+C=0$ приводятся к квадратным заменой $t=a^{f(x)}$.

б) Уравнения вида $\frac{A}{a^{f(x)}}+B\cdot a^{f(x)}+C=0$ приводятся к квадратным после замены $t=a^{f(x)}$ и приведения к общему знаменателю.

в) Уравнения вида $A\cdot a^{2f(x)}+B\cdot (ab)^{f(x)}+C\cdot b^{2f(x)}=0$ (однородные второй степени относительно функций $a^{f(x)}$ и $b^{f(x)}$) приводятся к квадратным, если разделить обе части уравнения на $a^{2f(x)}\neq 0$ и выполнить замену $\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}=t$.

Пример 1. Решить уравнение $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=10$.

Решение. Заметим, что числа $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})$ и $(\sqrt{5-2\sqrt{6}})$ являются взаимно обратными, так как $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})(\sqrt{5-2\sqrt{6}})=\sqrt{25-24}=1$, тогда $5-2\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^{-1}$. Запишем исходное уравнение в виде: $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{-x}=10$ и выполним замену переменной по формуле: $y=(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x$, $y>0$. Получим квадратное уравнение: $y+\frac{1}{y}=10$, корни которого равны: $y_1=5+2\sqrt{6}$ и $y_2=5-2\sqrt{6}$.

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l}(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x=5+2\sqrt{6},\\(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x=5-2\sqrt{6};\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=-2.\end{array}\right.$

Ответ: 2; –2.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.	1) 6; 2) 2; 3) 5,2; 4) 5; 5) –6.
2.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $2^{x^2-3}\cdot\sqrt{5^{2x^2-6}}=0{,}01\cdot 1000^{x-1}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
3.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{2^{x^2}}=0{,}25\cdot 16^{x+3}$.	1) 10; 2) 0; 3) 8; 4) –2; 5) –20.
4.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[3]{2{,}25}:\sqrt[3]{1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^x}=1$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{9}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 0; 5) –1.
5.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $9^{\sqrt{x-1}}=27\cdot 3^{\sqrt{x-1}}$.	1) 10; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
6.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $(0{,}(3))^{2-x}-6\cdot 9^{\frac{x-1}{2}}+2\cdot 3^{x-6}=29$.	1) 6; 2) 3; 3) 5,4; 4) 5; 5) –6.
7.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $2^{\sqrt{x}-2}-2^{\sqrt{x}+1}=2^{\sqrt{x}-1}+12$.	1) 9; 2) $\sqrt{3}$; 3) 3; 4) –81; 5) –9.
8.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $15\cdot 2^x-2^{x-1}-2^{x-2}=7^x+7^{x-1}+7^{x-2}$.	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
9.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $4^x-3^{x-0{,}5}=3^{x+0{,}5}-2^{2x-1}$.	1) 0; 2) 3; 3) 2; 4) 1,5; 5) –1,5.
10.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $4^{x-1}-2^{x+3}+28=0$.	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1.
11.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $1-3\cdot 2^{1-x}+2^{3-2x}=0$.	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1.
12.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $2^{x^2}+2^{1-x^2}=4{,}5$.	1) 0; 2) $-\sqrt{2}$; 3) 2; 4) $\sqrt{2}$; 5) –2.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
13.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{1}{5^x-1}+\frac{1}{5^x+1}=\frac{5}{12}$.	1) –1; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) –2.
14.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6(2^x-\frac{2}{2^x})=1$.	1) –1; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) –2.
15.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $2^{3x}+8^{-x}+3\cdot 2^x-15\frac{5}{8}+3\cdot 2^{-x}=0$.	1) –1; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) –2.
16.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{(7+\sqrt{48})^x}+\sqrt{(7-\sqrt{48})^x}=14$.	1) –4; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) –2.
17.	Найти произведение большего корня на количество корней уравнения $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$.	1) –4; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) –2.
18.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $4^{1+\lg x}-6^{\lg x}=2\cdot 3^{2+\lg x^2}$.	1) 0,001; 2) 1; 3) 0,01; 4) 10; 5) 100.
19.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lg(x+1)\cdot 3^{x+1}-54\cdot 3^{x-1}-9\lg(x+1)+18=0$.	1) 100; 2) 99; 3) 2; 4) 97; 5) –2.
20.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $2^{x-x^2}\cdot 2^{\lg x}\cdot(0,2)^{-\lg x}+3=\frac{x}{4}+3\cdot 2^{x-x^2-2}$.	1) 12; 2) 13; 3) 2; 4) 14; 5) 10.
21.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^x+\left(\frac{1}{8}\right)^x=(0,1)^x$.	1) 2; 2) 3; 3) –2; 4) –1; 5) 5.
22.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $3^{x-5}+4^{x-5}=91$.	1) 8; 2) 2; 3) 3; 4) 6; 5) 1.
23.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $0,5^{x+3}=x+6$.	1) 2; 2) –3; 3) –2; 4) –4; 5) –5.
24.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $4^x+2^x(4x-20)+96-32x=0$.	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
25.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $2^{2x^2-2x}+2^{x^2-x+2}=32$.	1) 2; 2) –3; 3) –2; 4) –4; 5) –5.
26.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{(\sqrt{3})^{4x}-4\cdot 3^{x+2}+324}=9$.	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
27.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{7^{x+1}(7^{x-1}-(\sqrt{3})^0)}=\sqrt{7^x-7}$.	1) 8; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 1.
28.	Найти в градусах сумму корней уравнения $\frac{3^{\sin^2 x}-4+3^{\cos^2 x}}{\sqrt{6x-x^2}}=0$.	1) 585; 2) 600; 3) 570; 4) 540; 5) 360.
29.	Найти произведение большего корня на количество корней уравнения $5^{\left\|2x^2-x\right\|}+5^{1-\left\|x-2x^2\right\|}=6$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 6.
30.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $6^{x^2+x-6}+6^{(x-2)(x-1)}=2\cdot 6^{x^2-x-2}$.	1) –1; 2) 2; 3) –2; 4) 3; 5) 3,5.

19. Логарифмические уравнения

Рассмотрим основные типы логарифмических уравнений и методы их решения.

1) Уравнения, решаемые по определению логарифма. Это уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, равносильны уравнению $f(x) = a^b$.

2) Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильны одной из следующих систем: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$. При этом решают какую-либо одну из указанных систем (более простую). Второй способ решения заключается в переходе к уравнению $f(x) = g(x)$ и последующей подстановке найденных корней в исходное уравнение.

3) Уравнения, в решении которых используют свойства логарифмов и преобразуют уравнение к видам 1 или 2. В этом случае необходимо помнить о применении свойств 3*—5* логарифмов и о том, что при нахождении ОДЗ переменной следует выписывать условия на переменную, опираясь на исходное условие задачи.

4) Метод подстановки чаще всего применяют при решении уравнений второй степени и выше относительно логарифма.

5) Метод логарифмирования применяют для решения уравнений, в которых переменная находится как под логарифмом, так и в основании степени.

6) Уравнения, решаемые функциональным методом.

Пример 1. Решить уравнение $\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$.

Решение. Поясним, что запись $\log_a^2 b$ означает: $(\log_a b)^2$. Поэтому, упрощая слагаемые в левой части уравнения и учитывая область его определения ($x > 0$), получим:

$\log_{0,5}^2 4x = (\log_{2^{-1}} 4x)^2 = (-\log_2 4x)^2 = (\log_2 4 + \log_2 x)^2 = (2 + \log_2 x)^2 = 4 + 4\log_2 x + \log_2^2 x$;

$\log_2 \frac{x^2}{8} = \log_2 x^2 - \log_2 8 = 2\log_2 |x| - 3 = 2\log_2 x - 3$.

После этих преобразований и приведения подобных слагаемых уравнение примет вид: $1 + 6\log_2 x + \log_2^2 x = 8$. Выполним замену переменной: $\log_2 x = y$ и решим квадратное уравнение: $y^2 + 6y - 7 = 0$: $y_1 = 1$, $y_2 = -7$. Тогда обратная замена: $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = -7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2^{-7}. \end{array}\right.$

Ответ: 2; $\frac{1}{128}$.

Пример 2. Решить уравнение $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

Решение. Область определения уравнения: $x > 0$. Так как $6^{\log_6^2 x} = (6^{\log_6 x})^{\log_6 x} = x^{\log_6 x}$, то уравнение примет вид: $2x^{\log_6 x} = 12$, $x^{\log_6 x} = 6$. При условии, что $x > 0$, обе части уравнения — положительны, поэтому можно прологарифмировать их по основанию 6. Получим: $\log_6 (x^{\log_6 x}) = \log_6 6$; $\log_6 x \cdot \log_6 x = 1$ и уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \log_6 x = 1, \\ \log_6 x = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = 6^{-1}. \end{array}\right.$

Ответ: 6; $\frac{1}{6}$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lg(5x - x^2) = \lg 2 + \lg 3$.	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 5; 5) –5.
2.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_\pi (x - \sqrt{10}) = \log_\pi (x - x^2 + 11) - \log_\pi (x + \sqrt{10})$.	1) –0,5; 2) 0,5; 3) 3,5; 4) 4; 5) –3.
3.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\log_5 (x^2 - 3x - 3) + \log_{0,2} (6x^2 + 5x - 7) = \lg(\operatorname{tg} 225°)$.	1) –2; 2) 0,4; 3) 0,8; 4) –0,4; 5) –0,8.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
4.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\lg(1-3x)-1=\frac{1}{\log_3\sqrt{10}}$.	1) –0,1; 2) –0,01; 3) 0,5; 4) –0,5; 5) 0,2.
5.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{\log_{1,2}2x}{\log_{\frac{5}{6}}0,1}+\lg(x-4)=1$.	1) 1; 2) –1; 3) 4; 4) 5; 5) –5.
6.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\lg(2x-5)\cdot\log_{x^2-8}10=0,5$.	1) $\frac{11}{3}$; 2) $-\frac{11}{3}$; 3) –11; 4) 3; 5) 11.
7.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{2-x}=1$.	1) 0; 2) 2; 3) 5; 4) 7; 5) –7.
8.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_x(2x)-\log_x(x^2-2x+3)=\log_{\sqrt{3}}2^\circ$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) –4.
9.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\log_3(3^{x+1}-26)+x=2$.	1) –1; 2) 2; 3) –3; 4) 5; 5) –5.
10.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\log_3(\log_9 x+0,5+9^x)=2x$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) –9; 4) 3; 5) –3.
11.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_{x-1}(3x^2-x-5)=4\log_{\sqrt{x-1}}\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$.	1) 1; 2) 1,5; 3) –0,5; 4) –2; 5) –3.
12.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_3(x^2+6x-16)-6=\log_{0,(3)}\frac{x-2}{x+8}$.	1) 4; 2) 29; 3) –25; 4) 25; 5) –29.
13.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\log_2(3-x)(x-7)+\log_{0,5}\frac{3-x}{x-7}=2$.	1) 45; 2) 9; 3) –5; 4) 5; 5) –9.
14.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\lg10^{\lg(x^2+21)}-1=\lg x$.	1) 10; 2) 3; 3) 7; 4) –3; 5) –7.
15.	Найти значение выражения a^3-54b, где a и b — наибольший и наименьший корни уравнения $3\log_3^2 x+\log_3 x^7=6$ соответственно.	1) 9; 2) 8; 3) 7; 4) –8; 5) –7.
16.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $2\lg^4 x+2\log_5^2 0,2=2,5+1,5\lg^2 x$.	1) 1; 2) $10^{-0,5}$; 3) $10^{0,5}$; 4) 10; 5) –10.
17.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_2^2(2x)=\log_2\frac{x^2}{2}+3$.	1) 0; 2) 2,5; 3) 2; 4) 0,5; 5) –0,5.
18.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\lg(10x)\cdot\lg(0,1x)=\lg x^3-3$.	1) 1; 2) 10^2; 3) 10^4; 4) 10^3; 5) 10.
19.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $\log_2^2(x+2)-3\log_2(x+2)\cdot\log_2(1-x)+2\log_2^2(1-x)=0$.	1) 0; 2) –1; 3) 2; 4) –1,5; 5) $3-\sqrt{13}$.
20.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $4\log_4^2(-x)+2\log_4 x^2=-1$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0,5; 5) –0,5.
21.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{2\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}$.	1) 100; 2) 25; 3) 1; 4) –100; 5) –1.
22.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{5+\lg(x-1)}{\lg^2(x-1)-1}-\frac{2}{\lg(\frac{10}{x-1})}=1$.	1) 10000; 2) 1001; 3) 10001; 4) 1000; 5) 101.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
23.	Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения $x^{\log_2 x+4}=0.125$.	1) 1; 2) 0,25; 3) 2; 4) 0,5; 5) 5.
24.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^{\lg^2 x+\lg x^3-3}=10^{\lg x}$.	1) 1,11; 2) 1,1; 3) 1,2; 4) 0,11; 5) 1.
25.	Найдите значение выражения $8a^3+b$, где a и b — наименьший и наибольший корни уравнения $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$ соответственно.	1) 10; 2) 9; 3) 11; 4) 1; 5) 13.
26.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$.	1) $-\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{8}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 3) 2; 5) –2.
27.	Найти произведение большего корня на количество корней уравнения $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$.	1) 2; 2) 9; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{9}$; 5) 3.
28.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{31-2,5\log_2 x}=5-\log_8 x\sqrt{x}$.	1) 1024; 2) 256; 3) 0,25; 4) 2048; 5) 4096.
29.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_{x+1}(5+4x-x^2)-\log_{5-x}(x^2+2x+1)=2$.	1) $2-\sqrt{2}$; 2) 4; 3) $3-2\sqrt{2}$; 4) 5; 5) $3+2\sqrt{2}$.
30.	Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\log_{1-8x^2}\lvert x\rvert=\frac{1}{4}-\frac{1}{\log_3(64x^4-16x^2+1)}$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $-\frac{1}{9}$; 5) 2.
31.	Найти произведение корней уравнения $\lg^2\left(1+\frac{3}{x}\right)+\lg^2\left(1-\frac{3}{x+3}\right)=2\lg^2\left(\frac{3}{x-1}-1\right)$.	1) $-3\sqrt{1,5}$; 2) 1,5; 3) $-1,5\sqrt{3}$; 4) –3; 5) $1,5\sqrt{2}$.

20. Показательные неравенства

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности показательной функции $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$.

1) Если $a>1$, то функция $y=a^x$ является возрастающей, поэтому справедливо утверждение:

$$\begin{cases} a^{f(x)}>a^{g(x)}, \\ a>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ a>1. \end{cases}$$

2) Если $0<a<1$, то функция $y=a^x$ является убывающей, следовательно справедливо утверждение:

$$\begin{cases} a^{f(x)}>a^{g(x)}, \\ 0<a<1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ 0<a<1. \end{cases}$$

Виды показательных неравенств по способу их решения фактически совпадают с видами показательных уравнений, поэтому сразу рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2(x-2)}{3}}>52$.

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде $2^{2x}-2^{2x-2}+2^{2x-4}>52$ и вынесем за скобку множитель 2^{2x-4}. Получим $2^{2x-4}(2^4-2^2+1)>52$, откуда $2^{2x-4}>4$; $2x-4>2$; $x>3$.

Ответ: $(3;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $4^x-2\cdot 5^{2x}+10^x>0$.

Решение. Приведем неравенство к виду: $2^{2x}+2^x\cdot 5^x-2\cdot 5^{2x}>0$. Заметим, что в левой части неравенства находится выражение, являющееся однородным второй степени относительно 2^x и 5^x. Разделив обе части неравенства на 5^{2x}, получим: $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{5}\right)^x-2>0$. Выполним замену $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$, $y>0$ и получим неравенство: $y^2+y-2>0$, решением

которого является множество $y \in (1; +\infty)$ (с учетом условия $y > 0$). Обратная замена: $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$. $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^0$, $x < 0$

(не забываем о том, что функция $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ убывает на R).

Ответ: $(-\infty ; 0)$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти наименьшее целое решение неравенства $(0,75)^{3-2x} < \left(\frac{16}{9}\right)^{x-1}$.	1) 1; 2) –2; 3) 2; 4) 0; 5) –1.
2.	Найти наименьшее целое решение неравенства $\sqrt[4]{7^x} > \sqrt[5]{343}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
3.	Найти сумму целых решений неравенства $0.8^{\frac{3-2x}{1-x}} > \frac{16}{25}$, удовлетворяющих условию $\lvert x \rvert \le 4$.	1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9; 5) 10.
4.	Найти наибольшее целое решение неравенства $2{,}1^{\frac{x^2+6x+11}{x-3}} \le 1$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
5.	Найти сумму целых решений неравенства $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2-5x-35} > 1.8$.	1) 9; 2) 12; 3) 13; 4) 14; 5) 15.
6.	Найти наименьшее целое решение неравенства $9^{3+x} + 3^{2(x+1)} > \frac{738}{81}$.	1) 1; 2) –2; 3) 2; 4) 0; 5) –1.
7.	Найти наименьшее целое решение неравенства $5^{2x-1} - 2^{2x} - 5^{2x} - 2^{2x+2} \ge 0$.	1) 1; 2) 2; 3) –2; 4) 0; 5) –1.
8.	Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt{7^{2x+6}} - \sqrt{49^{x+2}} - 2^{x+5} + 2 \cdot 2^{2+x} > 0$, удовлетворяющих условию $\lvert x \rvert \le 5$.	1) 9; 2) 12; 3) 13; 4) 14; 5) 15.
9.	Найти наибольшее целое решение неравенства $0{,}25 \cdot 2^{4x} < 7^{1-2x}$.	1) 1; 2) –2; 3) 2; 4) 0; 5) –1.
10.	Решением неравенства $5^{2x+1} > 5^x + 4$ является множество:	1) $(-\infty ; 0)$; 2) $(-\infty ; 1)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$; 5) $(-\infty ; -0{,}8) \cup (1; +\infty)$.
11.	Решением неравенства $0{,}25^x + 2^{3-x} > 9$ является множество:	1) $(-\infty ; 0)$; 2) $(-\infty ; 1)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$; 5) $(-\infty ; -9) \cup (1; +\infty)$.
12.	Найти количество целых решений неравенства $2^{2x^2+1} + 4 \le 3 \cdot 2^{x^2+1}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
13.	Найти наименьшее целое положительное решение неравенства $3^{x+1} + 18 \cdot (0{,}(3))^x > 29$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
14.	Все решения неравенства $\frac{15}{10^x - 2} > 10^x$ принадлежат промежутку:	1) (–1; 0); 2) (–2; –1); 3) (0; 1); 4) (2; 5); 5) (1; 2).
15.	Решением неравенства $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x - 25 > 0$ является множество:	1) (–1; 0); 2) $(-\infty ; 0)$; 3) (0; 2); 4) $(2; +\infty)$; 5) $(-\infty ; 0) \cup (2; +\infty)$.
16.	Найти количество целых решений неравенства $0{,}3^{2-4+\ldots+2x} > 0{,}3^{72}$.	1) 18; 2) 17; 3) 16; 4) 15; 5) 14.
17.	Найти наибольшее целое решение неравенства $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0$.	1) 1; 2) –2; 3) –1; 4) 0; 5) –3.
18.	Найти наибольшее целое решение неравенства $5^{x+0.5} - 9^x \ge 3^{2x-2} - 5^{x-0.5}$.	1) 1; 2) –2; 3) 2; 4) 0; 5) –1.
19.	Решением неравенства $9^{\lg(x-1)} + 6^{\lg(x-1)} < 2^{1+\lg(1-2x-x^2)}$ является множество:	1) $(-\infty ; 2)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) (0; 1); 4) (2; 5); 5) (1; 2).
20.	Решением неравенства $\sqrt{5-4^x} > 2^x - 1$ является множество:	1) $(-\infty ; 0)$; 2) $(0{,}5; +\infty)$; 3) $(-\infty ; 0) \cup (\frac{1}{2} ; +\infty)$; 4) (0; 2); 5) (0; 0,5).
21.	Найти наименьшее целое решение неравенства $x^2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + x + 2 > 2^{1+\sqrt{x}} + x^2 + x \cdot 2^{\sqrt{x}}$.	1) –1; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 0.
22.	Найти наименьшее целое решение неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x+4}}$.	1) –1; 2) –2; 3) –3; 4) –4; 5) 0.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
23.	Решением неравенства $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ является множество:	1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 0)$; 3) $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $[0; +\infty)$.
24.	Найти количество целых решений неравенства $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
25.	Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{4^x+5}{2^{x+1}-1} \geq 3$.	1) –1; 2) –2; 3) –3; 4) –4; 5) 0.
26.	Найти количество целых решений неравенства $x^2 5^x - 5^{x+2} < 0$.	1) 12; 2) 11; 3) 10; 4) 9; 5) 8.
27.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{3\cdot 2^{\frac{x}{2}} - 7\cdot 2^{\frac{x}{4}} - 20}{\sqrt{x-3}} \leq 0$.	1) 30; 2) 28; 3) 25; 4) 19; 5) 18.
28.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{(9-3^{x+1})(2^x-8)}{(x+5)\sqrt{-x}} < 0$.	1) –12; 2) –11; 3) –10; 4) –9; 5) –8.

21. Логарифмические неравенства

Решение логарифмических неравенств основано на свойствах монотонности логарифмической функции. Рассмотрим основные типы неравенств и методы их решения.

1) Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе:

при $a > 1$: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ При $0 < a < 1$ имеем: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

2) Метод замены переменной.

3) Метод логарифмирования.

4) Обобщенный метод интервалов.

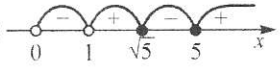
5) Неравенства вида $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ с переменным основанием можно решать по следующей схеме:

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ a(x) > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < g(x), \\ 0 < a(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$ или же, заменив исходное неравенство равносильным:

$(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0$ с учетом области определения входящих в состав неравенства функций.

Пример 1. Решить неравенство $\log_x 5 + 2\log_5 x \leq 3$.

Решение. Решим данное неравенство методом интервалов. Для этого, используя формулу перехода к новому основанию, приведем его к виду: $\frac{1}{\log_5 x} + 2\log_5 x - 3 \leq 0$, $\frac{2\log_5^2 x - 3\log_5 x + 1}{\log_5 x} \leq 0$. Область определения функции $f(x) = \frac{2\log_5^2 x - 3\log_5 x + 1}{\log_5 x}$: $x > 0$, $x \neq 1$. Найдем нули этой функции, для этого решим уравнение $2\log_5^2 x - 3\log_5 x + 1 = 0$. Получим $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = 5$. Изобразим найденные нули на области определения функции и определим знаки функции $f(x)$ на каждом из полученных промежутков:



Ответ: $(0; 1) \cup [\sqrt{5}; 5]$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Решение. (1 способ) Рассмотрим два случая: когда основание логарифма больше 1 и когда оно положительно, но меньше 1: $\begin{cases} 2x+3 > 1, \\ x^2 < 2x+3, \\ x^2 > 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x^2 > 2x+3. \end{cases}$ Решив каждую из систем и объединив решения, получим ответ.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Решение. (2 способ) Найдем ОДЗ исходного неравенства: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3\neq 1, \\ x^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x\neq -1, \\ x\neq 0 \end{cases}$ и перейдем к неравенству, равносильному данному: $(2x+3-1)(x^2-2x-3)<0$, решив которое методом интервалов, получим: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;3)$. С учетом ОДЗ, ответом исходного неравенства будет множество $\left(-\frac{3}{2};\ -1\right)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 3)$.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};\ -1\right)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 3)$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти количество целых решений неравенства $\log_{0,5}\frac{x-2}{3}<\log_{0,5}\frac{x-12}{2}$.	1) 21; 2) 20; 3) 15; 4) 18; 5) 19.
2.	Решением неравенства $\log_5(3-x)<-1$ является множество:	1) $(-\infty;\ 2{,}8)$; 2) $(2{,}8;\ 3)$; 3) $(2{,}8;\ +\infty)$; 4) $(3;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 3)$.
3.	Найти наименьшее целое решение неравенства $\log_2\frac{x-3}{x+5}<0$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
4.	Найти длину интервала, являющегося решением неравенства $\lg(13x-x^2)>2\lg 2+2\lg 3$.	1) 13; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
5.	Найти наименьшее целое решение неравенства $\log_{0,4}(x^2+1)<\log_{0,4}(x+3)$.	1) –1; 2) –2; 3) –3; 4) –4; 5) –5.
6.	Найти сумму целых решений неравенства $\log_9(x^2-6x+8)\le 0{,}5$.	1) 6; 2) 8; 3) 12; 4) 10; 5) 9.
7.	Найти сумму целых решений неравенства $\lg(3-x)\ge\lg(4x^2+4x)+\log_{\frac{1}{2}}2$.	1) –14; 2) –12; 3) –13; 4) –15; 5) –10.
8.	Найти длину интервала, являющегося решением неравенства $2\log_{0,5}x>\log_{0,5}(x+1{,}5)+\log_{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
9.	Найти количество целых решений неравенства $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x<6$.	1) 24; 2) 25; 3) 26; 4) 27; 5) 28.
10.	Найти наибольшее целое решение неравенства $\log_3(x+2)(x+4)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
11.	Найти количество целых решений неравенства $\log_{0,5}\log_5(x^2-4)\ge 0$.	1) 1; 2) 0; 3) 6; 4) 7; 5) 2.
12.	Найти наименьшее целое решение неравенства $\log_{0,1}\log_2\frac{x^2+1}{x-1}<0$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
13.	Найти сумму целых решений неравенства $\log_{0,5}\log_2\log_{x-1}9>0$.	1) 39; 2) 49; 3) 36; 4) 37; 5) 35.
14.	Найти количество целых решений неравенства $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{0,5}(2^{x+1}-2)>-2$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
15.	Найти количество целых решений неравенства $\log_4(3^x-1)\cdot\log_{0,25}\left(\frac{3^x-1}{16}\right)\le\frac{3}{4}$, удовлетворяющих условию $\lvert x\rvert<7$.	1) 8; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
16.	Найти наименьшее целое решение неравенства $\log^2_{0,2}(x-1)>4$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 26; 5) 27.
17.	Решением неравенства $5\log_{0,5}x\le 6+\log^2_{0,5}x$ является множество:	1) $(0;\ \frac{1}{8}]\cup[\frac{1}{4};\ +\infty)$; 2) $[\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}]$; 3) $[\frac{1}{4};\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ \frac{1}{8}]$; 5) $(-\infty;\ \frac{1}{4})$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
18.	Решением неравенства $2\log_4 x < \log_4 \frac{4}{x}$ является множество:	1) $(0; \frac{1}{4}) \cup (2; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$; 3) $(\frac{1}{4}; +\infty)$; 4) $(-\infty; \frac{1}{4})$; 5) $(\frac{1}{4}; 2)$.
19.	Найти сумму целых решений неравенства $\log_2 x \le \frac{2}{\log_2 x - 1}$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
20.	Найти длину интервала, являющегося решением неравенства $\frac{1}{1-\log_{0,5} x} + \frac{1}{\log_{0,5} x} \ge 1$.	1) 1; 2) 0,5; 3) 1,5; 4) 2; 5) 2,5.
21.	Найти наименьшее целое решение неравенства $5^{\log_2 \frac{2}{x+2}} \le 1$.	1) –2; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
22.	Найти наибольшее целое решение неравенства $\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}$.	1) –3; 2) –2; 3) 0; 4) –1; 5) 1.
23.	Найти количество целых решений неравенства $2\log_3 \log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} \log_3 (9\sqrt[3]{x}) \ge 1$, удовлетворяющих условию $\lvert x \rvert \le 30$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
24.	Найти сумму длин интервалов, являющихся решениями неравенства $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.	1) 1; 2) 0,5; 3) 4,5; 4) 4; 5) 1,5.
25.	Решением неравенства $\log_{2x+4}(x^2+1) \le 1$ является множество:	1) $(-2; -1,5) \cup [-1; 3]$; 2) $(-2; -1,5)$; 3) $[-1; 3]$; 4) $(-\infty; -2)$; 5) $[3; +\infty)$.
26.	Решением неравенства $\frac{1-\log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2-6x}} < 0$ является множество:	1) $(-0,5; 0)$; 2) $(-\infty; -0,5)$; 3) $[-1; 3]$; 4) $(-\infty; \frac{1}{3})$; 5) $[-0,5; +\infty)$.
27.	Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt{\log_2 (x-1)} \le 1$.	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 8.
28.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{1}{\log_{x+4}(x+4)} \ge \log_{x+4}(2x^2+3x-20) - 1$.	1) 11; 2) 15; 3) 16; 4) 17; 5) 18.
29.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{1}{\log_2 (2x+4)} \le \frac{1}{2\log_4 \sqrt{x^2+10x+25}}$, удовлетворяющих условию $\lvert x \rvert < 4$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
30.	Найти сумму целых решений неравенства $\frac{1}{2}\log_{x+5}(x^2+2x+1) + \log_{-x-1}(-x^2-6x-5) \le 3$.	1) –15; 2) –12; 3) –3; 4) 0; 5) –8.
31.	Найти сумму целых решений неравенства $\log_{\frac{\cos 4\pi x}{\sqrt{2}}} \frac{\cos^2 4\pi x - \sin^2 2\pi x}{2} \le 2$, принадлежащих промежутку $[-6; 4]$.	1) –11; 2) –16,5; 3) –10,5; 4) –21; 5) –9,5.

22. Системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10, \\ x + y = 4 \end{cases}$, и указать наименьшее значение y в этих решениях.	1) 1; 2) –2; 3) 2; 4) 3; 5) 0.
2.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} 2^x + 3^y = 5, \\ 4^x + 3^{2y} = 4 \cdot 2^x \cdot 3^y - 11 \end{cases}$, и указать наибольшее значение x в этих решениях.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) $\log_2 3$; 5) $\log_3 2$.
3.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} - \frac{3y}{x}} = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{2y} = \sqrt{12} - \sqrt{8} \end{cases}$, и указать сумму всех значений x и y в этих решениях.	1) 4; 2) 12; 3) 8; 4) 9; 5) 16.
4.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} x - 6^y = 5, \\ x \cdot 6^y = 6 \end{cases}$, и указать сумму всех значений x и y в этих решениях.	1) 6; 2) –6; 3) 2; 4) 4; 5) 0.
5.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y = 75, \\ 2\lg x - \lg y = 2\lg 2 + \lg 3 \end{cases}$, и указать сумму всех значений x и y в этих решениях.	1) 3; 2) 18; 3) 8; 4) 9; 5) 16.
6.	Если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{5}}(x - y) = 2 \end{cases}$, то значение выражения $x_0^2 - y_0^2$ равно:	1) –16; 2) 29; 3) –21; 4) 21; 5) 16.
7.	Если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 8^{-y} = 2\sqrt{2}, \\ \log_2 \frac{1}{x} + 0.5 = 0.5\log_3(9y) \end{cases}$, то значение выражения $x_0 \cdot y_0^{-1}$ равно:	1) 3; 2) 12; 3) 6; 4) 2; 5) –12.
8.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = \lg 3 \end{cases}$, и указать сумму всех значений x и y в этих решениях.	1) 12; 2) 4; 3) 8; 4) 9; 5) 16.
9.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} x^{\log_3 y} = 27y, \\ y^{\log_3 x} = 81x \end{cases}$, и указать произведение всех значений x и y в этих решениях.	1) 81; 2) 9; 3) 243; 4) 27^{-1}; 5) 27.
10.	Если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} (\sqrt{x + y} + 3) \cdot 2^x = 5(x + y), \\ 2x + \log_2(x + y) = 4 \end{cases}$, то значение выражения $x_0^2 + y_0^2$ равно:	1) 10; 2) 4; 3) 8; 4) 9; 5) 14.
11.	Решением системы неравенств $\begin{cases} \log_3(2 - x) > 1, \\ 7^{2x+3} > 1 \end{cases}$ является промежуток:	1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $(-1; +\infty)$; 4) $[-1{,}5; -1)$; 5) $(-\infty; -1{,}5] \cup (-1; +\infty)$.
12.	Решением системы неравенств $\begin{cases} \log_{0.5}(2x + 1) \le -1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} < 1 \end{cases}$ является промежуток:	1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $(-3; -1]$; 4) $[-3; -1)$; 5) $(-\infty; -3] \cup (-1; +\infty)$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
13.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы $\begin{cases} 2^x - 5 = 4y(y+2), \\ 2^{x-2} - y \le 1, \end{cases}$ и указать сумму всех значений x и y в этих решениях.	1) 1; 2) $-0{,}5$; 3) 0,5; 4) 2; 5) 0.
14.	Найти все пары $(x; y)$, являющиеся решением системы $\begin{cases} 4^x = 4y^2 + 1, \\ 2^{2x-1} \le 2y, \end{cases}$ и указать сумму всех значений x и y в этих решениях.	1) 1; 2) $-0{,}5$; 3) 0,5; 4) 2; 5) 0.
15.	Если $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} 16\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y, \\ \log_2 x^2 \ge \log_4 y \end{cases}$, то значение выражения $x_0^4 \cdot y_0^{-1}$ равно:	1) 0,5; 2) 4; 3) 8; 4) 2; 5) 1.
16.	Если $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} 9\log_2^2 x + 1 = \log_2 y^2, \\ \log_2 x \ge \log_8 y \end{cases}$, то значение выражения $x_0^3 \cdot y_0$ равно:	1) 0,5; 2) 4; 3) 8; 4) 2; 5) 1.

23. Свойства функций, их графики. Задачи в координатах. Диаграммы

23.1. Определение функции. Свойства и графики функций

Функцией, заданной на множестве *D*, называется закон, по которому каждому значению x (аргумента) из множества D ставится в соответствие *одно* определенное значение y (функции). Множество D называют **областью определения** функции, а множество всех значений, которые может принимать y (функция), называется **областью (множеством) значений** функции.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости вида $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Функция f называется **четной (нечетной)**, если:

1) $D(f)$ — множество, симметричное относительно точки $x = 0$;

2) для любого значения $x \in D(f)$ верно равенство: $f(-x) = f(x)$ для четной функции (и $f(-x) = -f(x)$ для нечетной).

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Нули функции — это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox, т. е. корни уравнения $f(x) = 0$.

Промежутки, на которых функция принимает только положительные (или только отрицательные) значения, называются **промежутками знакопостоянства** функции.

Функция называется **возрастающей** на некотором промежутке, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

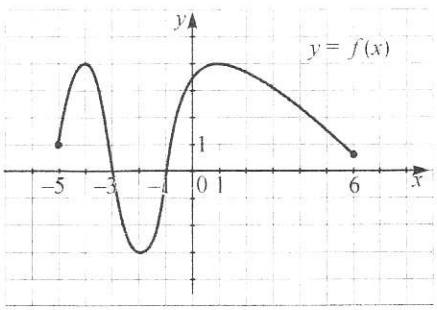
Функция называется **убывающей** на некотором промежутке, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Точка x_0 является **точкой минимума** (x_{min}) функции f, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство: $f(x) \ge f(x_0)$.

Точка x_0 является **точкой максимума** (x_{max}) функции f, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство: $f(x) \le f(x_0)$. Точки максимума и минимума имеют общее название — **точки экстремума**.

Значение функции в точке максимума называют **максимум функции** (y_{max}), а в точках минимума — **минимум функции** (y_{min}). Их общее название — **экстремумы функции**.

Пример 1. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, изображенной на рисунке:



1) Область определения функции: $[-5; 6]$;

2) область ее значений: $[-3; 4]$;

3) функция не является ни четной, ни нечетной, так как ее график не обладает симметрией как относительно оси ординат, так и относительно точки $(0; 0)$;

4) нули функции: $x = -3$ и $x = -1$;

5) функция принимает положительные значения на промежутках $x \in [-5; -3) \cup (-1; 6]$, отрицательные — при $x \in (-3; -1)$;

6) функция возрастает на промежутках $x \in [-5; -4]$ и $x \in [-2; 1]$, убывает при $x \in [-4; -2]$ и $x \in [1; 6]$;

7) точки экстремума: $x_{min} = -2$, $x_{max} = -4$; $x_{max} = 1$;

экстремумы: $y_{min} = f(-2) = -3$, $y_{max} = f(-4) = 4$; $y_{max} = f(1) = 4$.

Функция f называется **периодической** с периодом $T \neq 0$, если для любого значения $x \in D(f)$: 1) числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения; 2) верно равенство: $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Теорема 1. Для нахождения наименьшего положительного периода T функции вида $y = A \cdot f(kx + b) + c$ необходимо воспользоваться формулой: $T = \frac{T_0}{|k|}$, где T_0 — наименьший положительный период функции $y = f(x)$.

Теорема 2. Если число T — период функции f, то число вида $n \cdot T$ также является периодом функции f при любом целом $n \neq 0$.

Пример 2.

Найдем наименьший положительный период функции $y = 2\sin\frac{x}{3} + 5$.

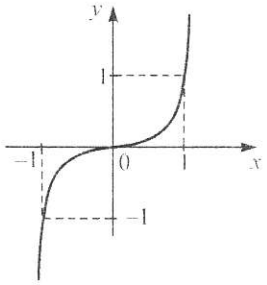
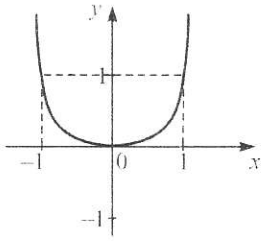
$T = \frac{T_0}{|k|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$, где $T_0 = 2\pi$ — наименьший положительный период функции $y = \sin x$.

Ответ: 6π.

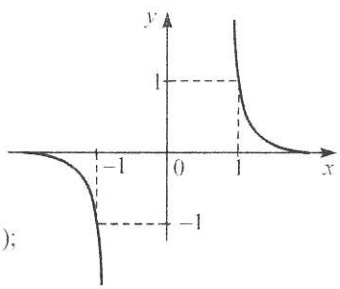
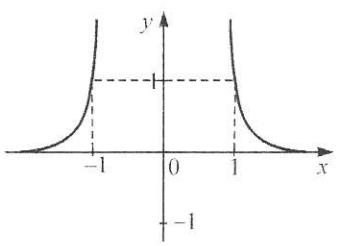
Свойства и графики линейной, квадратичной, тригонометрических, показательной и логарифмической функций были перечислены в соответствующих разделах данного пособия. Рассмотрим графики и свойства степенных функций, которые не были рассмотрены ранее.

Степенная функция

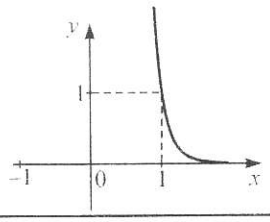
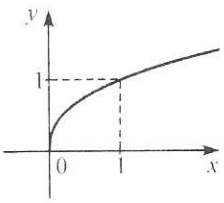
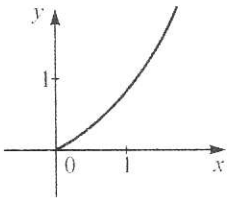
А) С *натуральным* показателем степени $y = x^n$, $n \in N$

n — нечетное	n — четное
1) $D(y) = R$; 2) $E(y) = R$; 3) функция нечетная; 4) $y = 0$ при $x = 0$; 5) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$; 6) функция возрастает при $x \in R$; 7) нет экстремумов. 	1) $D(y) = R$; 2) $E(y) = [0; +\infty)$; 3) функция четная; 4) $y = 0$ при $x = 0$; 5) $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 6) функция возрастает при $x \geq 0$, убывает при $x \leq 0$. 7) $x_{min} = 0$, $y_{min} = 0$. 

Б) С *целыми отрицательными* показателями степени $y = x^{-n}$, $n \in N$

n — нечетное	n — четное
1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) функция нечетная; 4) нет нулей; 5) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$; 6) функция убывает при $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$; 7) нет экстремумов. 	1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $E(y) = (0; +\infty)$; 3) функция четная; 4) нет нулей; 5) $y > 0$ при $x \in D(y)$; 6) функция возрастает при $x > 0$, убывает при $x < 0$; 7) нет экстремумов. 

В) С *рациональными* показателями степени $y = x^r$, $r \in Q$.

$r < 0$	$0 < r < 1$	$r > 0$
1) $D(y) = (0; +\infty)$; 2) $E(y) = (0; +\infty)$; 3) не является ни четной ни нечетной; 4) нет нулей; 5) $y > 0$ при $x \in D(y)$; 6) функция убывает при $x \in D(y)$; 7) нет экстремумов. 	1) $D(y) = [0; +\infty)$; 2) $E(y) = [0; +\infty)$; 3) не является ни четной ни нечетной; 4) $y = 0$ при $x = 0$; 5) $y > 0$ при $x > 0$; 6) функция возрастает при $x \in D(y)$; 7) нет экстремумов. 	1) $D(y) = [0; +\infty)$; 2) $E(y) = [0; +\infty)$; 3) не является ни четной ни нечетной; 4) $y = 0$ при $x = 0$; 5) $y > 0$ при $x > 0$; 6) функция возрастает при $x \in D(y)$; 7) нет экстремумов. 

Преобразования графиков функций

В таблице приведены алгоритмы основных преобразований графиков функций.

$y = -f(x)$	$y = f(-x)$	$y = f(x) + b$	$y = f(x + a)$
Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox	Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy	Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на b единиц (вверх при $b > 0$; вниз при $b < 0$)	Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $(-a)$ единиц (вправо при $a < 0$; влево при $a > 0$)
$y = k \cdot f(x)$		$y = f(kx)$	
$k > 1$	$k < 1$	$k > 1$	$k < 1$
Растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в k раз	Сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз	Сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в k раз	Растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз

График функции $y = |f(x)|$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика функции $y = f(x)$, расположенная ниже оси Ox, отражается симметрично относительно этой оси, остальная часть остается без изменения.

График функции $y = f(|x|)$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть в области $x \leq 0$ заменяется симметричным отражением относительно оси Oy части графика для $x \geq 0$.

Для построения графика функции $y = A \cdot f(kx + b) + B$ можно действовать по следующей схеме: 1) $y = f(x)$; 2) $y = A \cdot f(x)$; 3) $y = A \cdot f(kx)$; 4) $y = A \cdot f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$; 5) $y = A \cdot f(kx + b) + B$.

При решении задач с использованием свойств функций используют следующие теоремы:

Теорема 1. Если для всех $x \in X$ справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A — некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \leq g(x)$ равносильны системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Теорема 2. Если $f(x)$ — возрастающая на множестве X функция, $g(x)$ — убывающая на множестве X функция (или $g(x) = \text{const}$), то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на множестве X не более одного корня.

При нахождении множества значений функций, входящих в состав уравнений и неравенств, часто приходится использовать следующие числовые неравенства:

1) $(a + b)^2 \geq 2ab$ для любых a и b;

2) $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ при $a_1 > 0, \ldots a_n > 0$, равенство возможно только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, в частности $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ при $a_1 \geq 0$ и $a_2 \geq 0$, равенство возможно только при $a_1 = a_2$;

3) $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при условии $a > 0$, равенство возможно только при $a = 1$;

$a + \frac{1}{a} \leq 2$ при условии $a < 0$, равенство возможно только при $a = -1$.

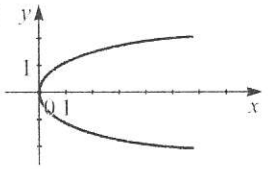
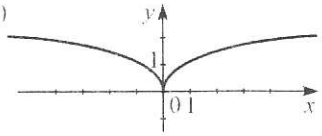
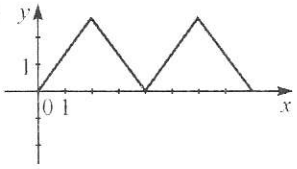
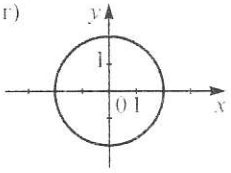
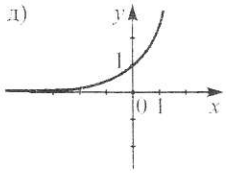
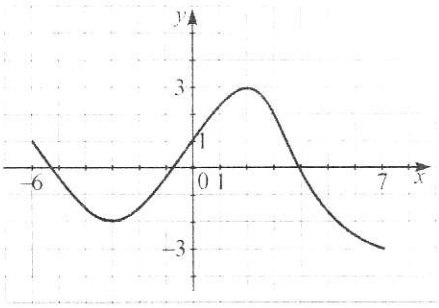
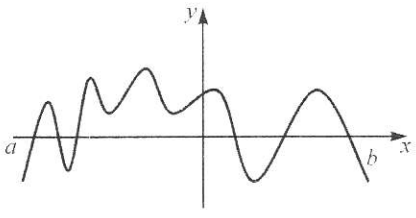
23.2. Задачи в координатах

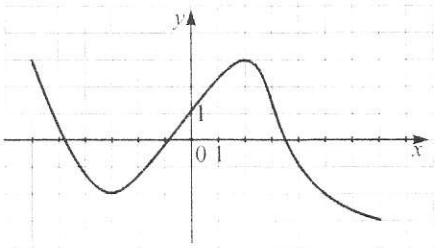
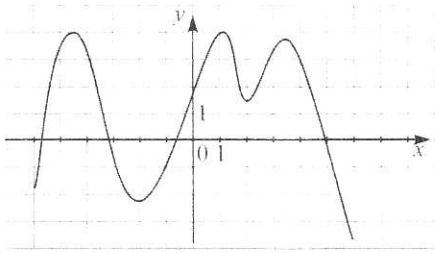
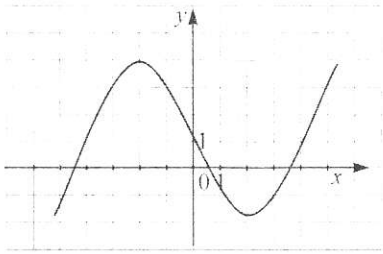
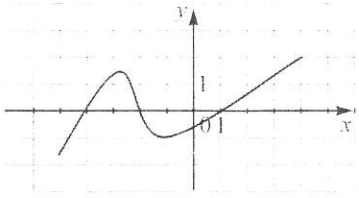
1) Расстояние между точками координатной плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ можно найти по формуле: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

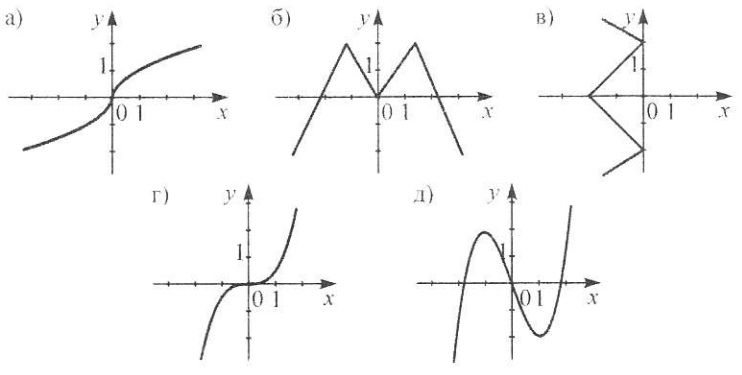
2) Координаты точки C — середины отрезка AB, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, равны: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

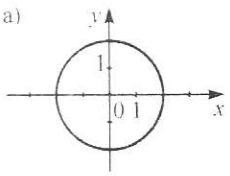
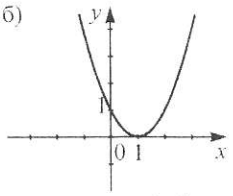
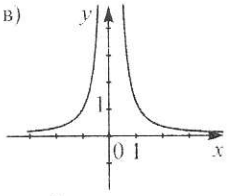
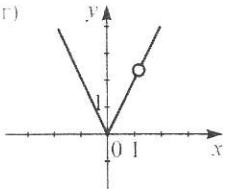
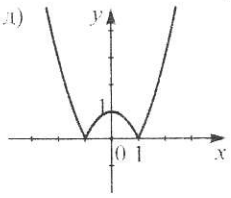
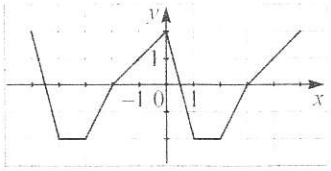
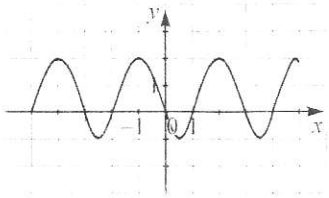
3) Уравнение прямой с угловым коэффициентом k и проходящей через точку $A(x_0; y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

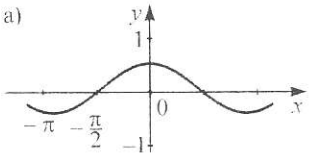
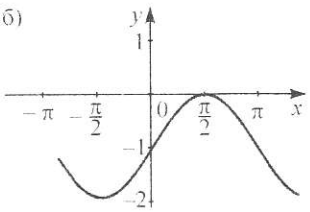
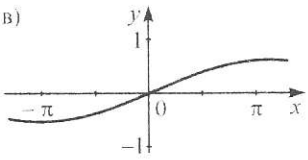
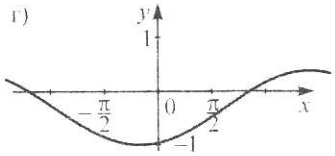
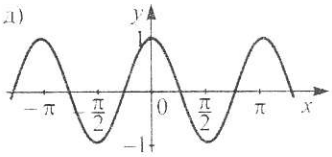
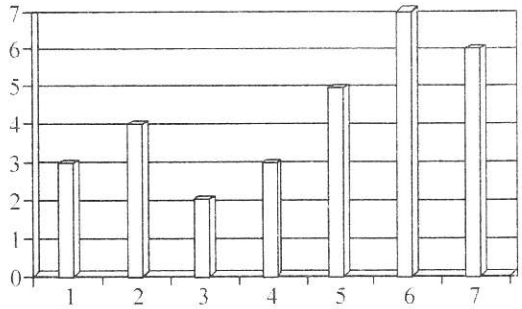
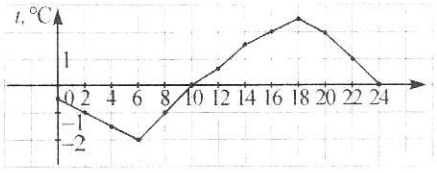
4) Уравнение окружности с центром в точке $O(a; b)$ и радиусом R имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Какие из линий *а*—*д* могут быть графиками функций? а)  б)  в)  г)  д) 	1) а, б, в, д; 2) б, в, г, д; 3) а, в, д; 4) а, г, д; 5) б, в, д.
2.	Функция задана графиком на отрезке $[-6; 7]$. Укажите область значений функции. 	1) $[-6; 7]$; 2) $[-2; 3]$; 3) $[-3; 3]$; 4) $[-3; 1]$; 5) $[-3; 2]$.
3.	Функция, график которой изображен на рисунке, определена на промежутке $[a; b]$. Укажите количество промежутков, на которых она сохраняет знак. 	1) 10; 2) 9; 3) 8; 4) 7; 5) 5.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
4.	Укажите промежуток возрастания функции, определенной на промежутке [–6; 7], график которой изображен на рисунке: 	1) [–3; 2]; 2) [–2; 3]; 3) [–1; 4]; 4) [0; 3]; 5) [–6; 2].
5.	Укажите промежуток, на котором функция, график которой изображен на рисунке, принимает только отрицательные значения. 	1) [–6; –2]; 2) [–3; –1]; 3) [–2; 1]; 4) [2; 3]; 5) [4; 7].
6.	Укажите точку максимума функции, определенной на промежутке [–5; 5], график которой изображен на рисунке. 	1) –4; 2) 2; 3) –2; 4) 0; 5) 4.
7.	Укажите максимум функции, график которой изображен в № 6.	1) –4; 2) 2; 3) –2; 4) 0; 5) 4.
8.	Укажите нули функции, определенной на промежутке [–5; 4], график которой изображен на рисунке. 	1) –4; –2; 1; 2) –5; –2; 0; 3) –2; 1; 4) –1; 0; 4; 5) –2; 0; 3.
9.	Из функций *а—д* выберите те, областью определения которых является вся числовая прямая: а) $y = \sin x$; б) $y = \lg x$; в) $y = \frac{1}{1+x^2}$; г) $y = 4^x$; д) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.	1) а, б, в, г; 2) б, в, г; 3) а, в, г; 4) а, г, д; 5) б, в, д.
10.	Из функций *а—д* выберите те, областью определения которых является промежуток $[0; +\infty)$: а) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; б) $y = \sqrt[6]{x}$; в) $y = x^{-\frac{5}{6}}$; г) $y = \log_3 x$; д) $y = \lvert x \rvert$.	1) б; 2) б, в; 3) б, в, г; 4) а, б, г; 5) б, в, д.
11.	Из функций *а—д* выберите те, областью определения которых является отрезок $[-1; 1]$: а) $y = \sqrt{2x - x^2 - 1}$; б) $y = \cos x$; в) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$; г) $y = \sqrt[6]{1 - x^4}$; д) $y = \lg(1 - x^2)$.	1) б; 2) б, г; 3) г; 4) б, г, д; 5) б, в, д.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
12.	Найти множество значений функции $y=\frac{2}{x^2+2x+3}$: а) $[0;1]$; б) $[1;+\infty)$; в) $(-\infty;1]$; г) $(0;1]$; д) $(0;1)$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
13.	Найти множество значений функции $y=\sqrt{-x^2-6x}$: а) $(0;3]$; б) $[3;+\infty)$; в) $(-\infty;0)\cup(0;3]$; г) $[0;3]$; д) $(0;3)$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
14.	Из функций *а—д* выберите те, множеством значений которых является вся числовая прямая: а) $y=\log_3 x$; б) $y=x^2-3x$; в) $y=\frac{1}{x}$; г) $y=\operatorname{ctg} x$; д) $y=3x+11$.	1) б; 2) а, б; 3) г; 4) а, г, д; 5) а, б, д.
15.	Из функций *а—д* выберите те, множеством значений которых является промежуток $[0;+\infty)$: а) $y=4^x$; б) $y=\sqrt{x-1}$; в) $y=-6x+x^2+9$; г) $y=x^{\frac{7}{8}}$; д) $y=\lvert x+5\rvert$.	1) а; 2) б, в, г, д; 3) в, г, д; 4) б, в, г; 5) а, б, д.
16.	Из функций *а—д* выберите те, множеством значений которых является отрезок $[1;3]$: а) $y=\cos x+2$; б) $y=\sqrt{4x-x^2-3}$; в) $y=\sqrt{4-x^2}+1$; г) $y=\frac{1}{x^2+1}$; д) $y=\lvert 2\sin x+1\rvert$.	1) в; 2) а, в; 3) а; 4) а, в, д; 5) а, б, д.
17.	Из функций *а—д* выберите те, которые возрастают на всей области определения: а) $y=0{,}6^x$; б) $y=\log_8 x$; в) $y=\lvert x+5\rvert$; г) $y=x^{-\frac{5}{3}}$; д) $y=2x-16$.	1) б, д; 2) а, в, д; 3) а, г, д; 4) б, в, д; 5) б, г, д.
18.	Из функций *а—д* выберите те, которые убывают на промежутке $(0;1)$: а) $y=\cos\pi x$; б) $y=(x+1)^6$; в) $y=(x-1)^4$; г) $y=\operatorname{ctg} x$; д) $y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^x$.	1) а, г; 2) а, в, г; 3) а, в, д; 4) б, в, д; 5) б, г, д.
19.	Через точку $(2;8)$ проходят графики функций: а) $y=(2\sqrt{2})^x$; б) $y=8\sin\frac{\pi x}{4}$; в) $y=\log_4 x$; г) $y=12-x^2+x$; д) $y=x^3$.	1) а, д; 2) а, в, г; 3) а, б, д; 4) б, в, д; 5) б, г, д.
20.	Через точку $(2;1)$ проходят графики функций: а) $y=x^{\frac{1}{2}}$; б) $y=\log_2 x$; в) $y=x^2-2x+1$; г) $y=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$; д) $y=\frac{4}{x^2-8x+16}$.	1) в, д; 2) а, в, г; 3) а, в, д; 4) б, в, д; 5) б, г, д.
21.	Из функций *а—д* выбрать четные: а) $y=x^2+2x$; б) $y=x\cdot\operatorname{ctg} x$; в) $y=\lvert\log_2 x\rvert$; г) $y=0{,}2^{\lvert x\rvert}$; д) $y=\frac{2^x+2^{-x}}{x^2}$.	1) в, д; 2) а, в, г; 3) а, в, д; 4) б, в, д; 5) б, г, д.
22.	Из функций *а—д* выбрать нечетные: а) $y=\sin(\frac{\pi}{2}-3x)$; б) $y=x^3\cdot\cos 2x$; в) $y=x\cdot\log_3\lvert x\rvert$; г) $y=\frac{x^2-x}{x-1}$; д) $y=3^{\operatorname{tg} x}$.	1) г, д; 2) а, б, г; 3) а, г, д; 4) б, в; 5) б, г, д.
23.	Из линий *а—д* выбрать графики нечетных функций: 	1) г, д; 2) а, б, г; 3) а, г, д; 4) а, б, г, д; 5) б, г, д.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
24.	Из линий *а*—*д* выбрать графики четных функций: а)  б)  в)  г)  д) 	1) в, д; 2) а, б, г; 3) б, в, д; 4) а, б, г, д; 5) б, г, д.
25.	Функция $y = f(x)$ является нечетной. Если на промежутке $(-\infty; 0)$ она задана формулой $y = 3^{5x-1}$, то на промежутке $(0; +\infty)$ она имеет вид:	1) $y = 3^{-5x-1}$; 2) $y = -3^{-5x-1}$; 3) $y = 3^{5x-1}$; 4) $y = -3^{-5x-1}$; 5) $y = -3^{5x-1}$.
26.	На рисунке изображен график некоторой периодической функции. Укажите ее наименьший положительный период. 	1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 10; 5) 15.
27.	На рисунке изображен график некоторой периодической функции. Укажите ее наименьший положительный период. 	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.
28.	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\cos\frac{\pi x}{4} + 17 + x^2 = 8x$.	1) –1; 2) 3; 3) 4; 4) 6; 5) 8.
29.	Найти количество корней уравнения $\lg(x^2 + 9 - 6x) = 2x^2 - 12x + 12$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
30.	Найти значение выражения $\frac{S}{\pi}$, где S — сумма корней (или корень, если он один) уравнения $\arcsin\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\right) = 4\pi(\pi - x) + x^2 + \frac{\pi}{2}$.	1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 6; 5) 8.
31.	Найти количество корней уравнения $\operatorname{ctg} x = 5^x$ на отрезке $[-7\pi; 12\pi]$.	1) 5; 2) 12; 3) 7; 4) 19; 5) 20.
32.	Найти количество корней уравнения $\log_{\log_2 6} x = \operatorname{tg} 2x$ на промежутке $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.
33.	Найти количество целых решений неравенства $13 + 6x \geq 2^{x+3} + 3x^2$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
34.	Найти сумму целых решений (или решение, если оно одно) неравенства $\frac{8x - 44}{x - 6} < 4x - x^2 + 4$.	1) 0; 2) 3; 3) 12; 4) 6; 5) 10.
35.	Количество целых решений неравенства $3^x + 3^{-x} \leq 2\cos x$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
36.	Найти сумму корней уравнения $f(x) = -1$, где $f(x)$ — нечетная функция, заданная при $x > 0$ формулой $f(x) = x^2 - 2x$.	1) 0; 2) $-\sqrt{2}$; 3) –2; 4) 1; 5) 2.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
37.	Найти произведение корней уравнения $f\left(\frac{3x}{2}\right)=8$, где $f(x)$ — четная функция, заданная при $x<0$ формулой $f(x)=2^{-x}$.	1) 0; 2) –2; 3) –4; 4) 4; 5) 2.
38.	Определить количество корней уравнения $4-x^2=(2^{\lvert x\rvert}-3)^2$.	1) 5; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
39.	Найдите количество натуральных значений аргумента из промежутков убывания функции $y=\lvert x^2-3x+0{,}25\rvert$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
40.	Найти сумму целых значений аргумента из промежутков возрастания функции $y=\left\lvert\log_2\left\lvert\frac{x-7{,}5}{2}\right\rvert\right\rvert$, удовлетворяющих условию $\lvert x\rvert\le 10$.	1) 18; 2) 13; 3) 16; 4) 17; 5) 23.
41.	На рисунках *а*—*д* изображены графики функций: $y=\sin x-1$, $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$, $y=\cos 2x$, $y=0{,}5\cos x$, $y=\sin 0{,}5x$ (в произвольном порядке). В ответе укажите такой порядок графиков *а*—*д*, который соответствует порядку перечисления функций. а)  б)  в)  г)  д) 	1) в, б, г, а, д; 2) б, г, д, а, в; 3) б, д, г, а, в; 4) б, г, а, д, в; 5) д, в, б, г, а.
42.	На рисунке изображена диаграмма, отражающая объем выручки магазина в течение 7 дней. На сколько процентов больше выручено прибыли за последние три дня, чем за первые четыре дня работы магазина? 	1) 12; 2) 15; 3) 20; 4) 25; 5) 50.
43.	На графике изображено изменение температуры воздуха в городе в течение суток (измерения проводились каждые два часа).  В какой промежуток времени температура воздуха повышалась?	1) [2; 6]; 2) [18; 20]; 3) [0; 4]; 4) [0; 2]; 5) [6; 18].

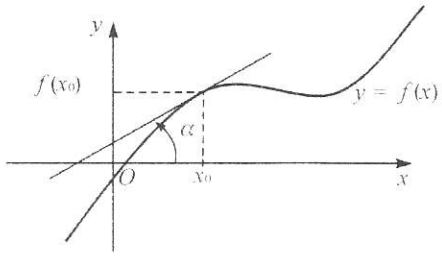
№ п/п	Задания	Варианты ответов
44.	По графику, изображенному в задаче № 43, найдите промежуток времени, в течение которого температура воздуха была только отрицательной.	1) [2; 6]; 2) [18; 20]; 3) [0; 12]; 4) [4; 14]; 5) [6; 18].
45.	По графику, изображенному в задаче № 43, найдите в градусах °C разность между наибольшей и наименьшей суточными температурами в этот день.	1) 2,5; 2) 2; 3) 4; 4) 5; 5) 4,5.
46.	Уравнение окружности с центром в точке (–1; 2) и радиусом 4 имеет вид: а) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$; б) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; в) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$; г) $(x-1)^2+(y-2)^2=16$; д) $(x+1)^2+(y-2)^2=8$.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
47.	В магазин привезли фрукты четырех видов. На рисунке изображена круговая диаграмма распределения количества привезенных фруктов. Известно, что масса всех фруктов 240 кг. Тогда масса (в кг) груш равна:  	1) 54; 2) 60; 3) 64; 4) 68; 5) 72.
48.	Какая из точек $A(4;\sqrt{3})$, $B(2;2\sqrt{2})$, $C(0;1)$, $D(3;\sqrt{2})$ или $E(-1;3)$ принадлежит окружности с центром в точке (1; 0) и радиусом 3?	1) A; 2) B; 3) C; 4) D; 5) E.
49.	Одна из аллей ботанического сада засажена хвойными деревьями. Количество деревьев распределено следующим образом: кедры — 360 штук; пихты — 720 штук; лиственница — 900 штук; ель — 1080 штук; сосна — 1440 штук.  На рисунке изображена круговая диаграмма распределения высаженных деревьев. Определите величину в градусах центрального угла кругового сектора диаграммы, соответствующего лиственнице.	1) 60°; 2) 64°; 3) 72°; 4) 75°; 5) 78°.
50.	Найти расстояние между точками $(x_1;f(x_1))$ и $(x_2;g(x_2))$, где x_1 — точка максимума функции $f(x)=14x-x^2-46$, а x_2 — точка минимума функции $g(x)=x^2-2x-4$.	1) 10; 2) 9; 3) $3\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{3}$; 5) 10,5.
51.	Найдите расстояние между точками $(x_1;f(x_1))$ и $(x_2;f(x_2))$, где x_1 и x_2 — точки экстремума нечетной функции, заданной при $x\geq 0$ формулой $y=4x-x^2$.	1) 10,2; 2) 9,6; 3) $5\sqrt{2}$; 4) $4\sqrt{5}$; 5) 10,5.
52.	Найдите расстояние между точками $(x_1;f(x_1))$ и $(x_2;f(x_2))$, где x_1 и x_2 — точки максимума функции $y=\left\|x^2-2\left\|x\right\|-2\right\|$.	1) $\sqrt{2}$; 2) 2,5; 3) 2,4; 4) 2,2; 5) 2.
53.	Даны точки $A(-2;5)$ и $B(8;9)$. Найдите координаты точки C — середины отрезка AB: а) (6; 14); б) (–5; –2); в) (3; 7); г) (4; 8); д) (3; 6,5).	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
54.	Точки $A(3;11)$, $B(1;-7)$ и $C(5;4)$ — вершины треугольника ABC. Найдите длину медианы CM треугольника.	1) 3,5; 2) $\sqrt{13}$; 3) $3\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{3}$; 5) 3,6.
55.	Даны точки $A(6;1)$ и $B(-2;7)$. На отрезке AB как на диаметре построен круг. Найдите площадь кругового сектора данного круга с центральным углом 144°.	1) 12π; 2) 10π; 3) 25π; 4) 16π; 5) 24π.
56.	Отрезок AB является диаметром окружности, заданной уравнением $x^2+(y-1)^2=9$. Найдите произведение координат точки B, если точка A имеет координаты $(\sqrt{5};3)$.	1) –5; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{5}$; 5) 10.

24. Производная. Применение производной

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ и обозначается $f'(x_0)$.

24.1. Геометрический смысл производной

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в его точке с абсциссой x_0: $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, где α — угол наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.



Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в его точке с абсциссой x_0, имеет вид:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

24.2. Механический смысл производной

Если тело движется прямолинейно по закону $S(t)$, где $S(t)$ — путь, пройденный телом за время t, тогда скорость тела есть производная от пройденного пути по времени: $v(t)=S'(t)$.

24.3. Правила вычисления производной

Если $u(x)$ и $v(x)$ — функции, имеющие производные, c — const, то:

1) $c'=0$,

2) $(cu)'=c\cdot u'$,

3) $(u+v)'=u'+v'$,

4) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$,

5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$,

6) $(x^k)'=k\cdot x^{k-1}$ для любого целого k;

7) $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

24.4. Применение производной к исследованию функции

Монотонность функции

Если в каждой точке x промежутка $(a;\ b)$ $f'(x)>0$, то функция *возрастает* на промежутке $(a;\ b)$.

Если в каждой точке x промежутка $(a;\ b)$ $f'(x)<0$, то функция *убывает* на промежутке $(a;\ b)$.

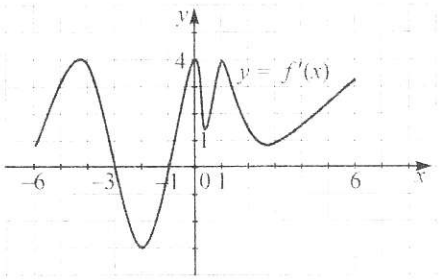
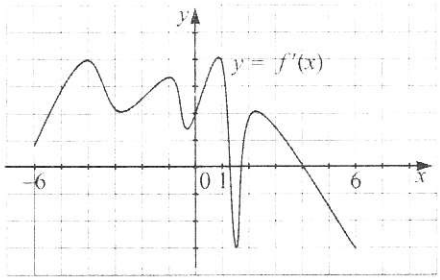
Экстремумы функции

Если точка x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то производная в ней либо равна нулю, либо не существует.

Если точка x_0 — внутренняя точка области определения функции, для которой $f'(x)=0$ и при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 является *точкой максимума* функции $f(x)$.

Если точка x_0 — внутренняя точка области определения функции, для которой $f'(x)=0$ и при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «–» на «+», то x_0 является *точкой минимума* функции $f(x)$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Найти значение производной функции $y=\frac{1}{5}x^5-x^3+x+\sqrt{3}$ в точке $x_0=\sqrt{2}$.	1) $\pi-1$; 2) 1; 3) –1; 4) $\pi+1$; 5) 5.
2.	Найти значение производной функции $y=(3x^2-x)(2x+1)$ в точке $x_0=-1$.	1) –14; 2) 7; 3) 15; 4) –15; 5) –8.
3.	Найти значение производной функции $y=\frac{3}{x}-\frac{x^6}{3}+2\sqrt{x}$ в точке $x_0=1$.	1) –4; 2) 1; 3) –6; 4) –5; 5) 5.
4.	Найти значение производной функции $y=\frac{5x-6}{1+4x}$ в точке $x_0=0{,}25$.	1) 7,25; 2) 2,5; 3) 6,2; 4) –7,25; 5) –2,25.
5.	Точка движется прямолинейно по закону $S(t)=\frac{2}{3}t^3-t^2+4t-9$. Найдите скорость точки в момент времени $t=2$.	1) 18; 2) 2; 3) 10; 4) 8; 5) 16.
6.	Точка движется прямолинейно по закону $S(t)=5+6t-t^2+t^3$. Найдите скорость точки в момент времени $t=3$.	1) 18; 2) 32; 3) 10; 4) 21; 5) 27.
7.	Точка движется прямолинейно по закону $S(t)=5t^2-2t+16$. В какой момент времени скорость точки была равна 8?	1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) 3; 5) 4.
8.	Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=3x^3-4x^2-2x-7$ в точке с абсциссой $x_0=1$.	1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) –3; 5) 3.
9.	Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=\frac{3x-1}{2-x}$ в точке с абсциссой $x_0=3$.	1) 5; 2) 6; 3) 8; 4) –5; 5) 1.
10.	Уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^2}{2}-3x+7$ в точке с абсциссой $x_0=2$ имеет вид:	1) $y=-x+5$; 2) $y=x+5$; 3) $y=-x-5$; 4) $y=-2x+5$; 5) $y=-2x-5$.
11.	Уравнение касательной к графику функции $y=x^3-2x^2+4x$ в точке с абсциссой $x_0=-1$ имеет вид:	1) $y=11x+3$; 2) $y=11x+4$; 3) $y=9x+2$; 4) $y=10x-4$; 5) $y=10x+1$.
12.	Касательная к графику функции $y=x^2-x+6$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°. Тогда данная касательная проходит через точку на графике с координатами:	1) (–1; 8); 2) (0; 6); 3) (1; 0); 4) (1; 6); 5) (3; 12).
13.	Касательная к графику функции $y=2x^2-x-3$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 135°. Ордината точки касания равна:	1) 0; 2) –1; 3) –2; 4) –3; 5) –4.
14.	Касательная к графику функции $y=3{,}5x^2-4x-\pi^2$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол arctg 3. Эта касательная пересекает ось ординат в точке с координатой y_1, равной:	1) $-3-\pi^2$; 2) $-3{,}5-2\pi$; 3) $-3{,}5-\pi^2$; 4) $-0{,}5-\pi^2$; 5) $-0{,}5-2\pi$.
15.	Касательная к графику функции $y=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+5$ параллельна оси абсцисс. Эта касательная задана уравнением:	1) $y=0$; 2) $y=5\frac{1}{6}$; 3) $y=9$; 4) $y=4$; 5) $y=6\frac{1}{6}$.
16.	Касательная к графику функции $y=3x^2-5x+11$ параллельна прямой $y=7x+24$. Сумма координат точки касания равна:	1) 6; 2) 12; 3) 24; 4) 15; 5) 25.
17.	Касательная к графику функции $y=x^2-2x$ перпендикулярна оси ординат. Сумма координат точки касания равна:	1) 0; 2) –1; 3) –2; 4) –3; 5) 1.
18.	Найдите уравнение касательной к графику функции $y=x^2-3x+4$, проходящей через точку $A(-1;\ 7)$, если абсцисса точки касания неотрицательна.	1) $y=-11x-4$; 2) $y=-x+6$; 3) $y=9x+16$; 4) $y=10x+17$; 5) $y=-3x+4$.
19.	Найдите угол между касательными, проведенными к графику функции $y=2x^2-\sqrt{3}x+2$ в точках с абсциссами $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_2=0$.	1) 30°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 75°; 5) 90°.
20.	Найдите угол между касательными, проведенными из точки $A\left(1\frac{5}{6};\ -\frac{1}{6}\right)$ к графику функции $y=1{,}5x^2-5x+4$.	1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 75°; 5) 90°.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
21.	Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = x^4 - 2x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.	1) 32; 2) $33\frac{1}{3}$; 3) 24; 4) 35; 5) $32\frac{2}{3}$.
22.	Найдите промежуток убывания функции $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 12$:	1) [1; 3]; 2) [0; 3]; 3) [2; 5]; 4) [–1; 2]; 5) [–2; 3].
23.	Найдите сумму целых значений аргумента из промежутка возрастания функции $y = 13 + 8x - \frac{x^3}{3} - x^2$:	1) 0; 2) 7; 3) –4; 4) –7; 5) 12.
24.	Найдите длину промежутка возрастания функции $y = \frac{x}{x^2 - x + 9}$.	1) 10; 2) 9; 3) 8; 4) 7; 5) 6.
25.	Найдите промежуток убывания функции $y = \frac{1}{(4-x)^2}$.	1) $(4; +\infty)$; 2) $(-\infty; 4)$; 3) (–4; 4); 4) (0; 4); 5) нет промежутков убывания.
26.	Найдите точки максимума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + \pi$:	1) $x = 3$; 2) $x = -1$; 3) $x = -1$ и $x = 3$; 4) $x = -3$ и $x = 1$; 5) $x = 4$.
27.	Найдите минимум функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x$:	1) $y = 0$; 2) $y = -36$; 3) $y = -32$; 4) $y = -27$; 5) $y = 5$.
28.	Найдите наибольшее значение функции $y = 0{,}25x^4 + x^3 - 2x^2 + 10$ на отрезке [–1; 2].	1) 16; 2) 9,25; 3) 18; 4) 7,25; 5) 14.
29.	Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$ на отрезке [0; 3].	1) $1\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 8; 4) 5; 5) 4.
30.	Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 7t + 15$. Найдите наименьшее значение скорости точки.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
31.	Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{4t^3}{3} + 6t^2 + t - 1$. В какой момент времени из промежутка [1; 5] скорость точки будет наибольшей?	1) 1,5; 2) 2,5; 3) 2; 4) 3; 5) 3,5.
32.	Функция $y = f(x)$ задана на отрезке [–6; 6]. На рисунке изображен график ее производной.  Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.	1) 1; 2) 0; 3) –1; 4) –3; 5) 3.
33.	Функция $y = f(x)$ задана на отрезке [–6; 6]. На рисунке (№ 32) изображен график ее производной. Укажите промежуток убывания функции $y = f(x)$.	1) [–3; –1]; 2) [0; 3]; 3) [1; 2]; 4) [–1; 2]; 5) [–2; 0].
34.	Функция $y = f(x)$ задана на отрезке [–6; 6]. На рисунке (№ 32) изображен график ее производной. Количество точек минимума функции $y = f(x)$ равно:	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
35.	Функция $y = f(x)$ задана на отрезке [–6; 6]. На рисунке изображен график ее производной.  Укажите количество промежутков, на которых функция $y = f(x)$ убывает.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
36.	Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-6; 6]$. На рисунке (№ 35) изображен график ее производной. Укажите количество промежутков, на которых функция $y = f(x)$ возрастает.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
37.	Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-6; 6]$. На рисунке (№ 35) изображен график ее производной. Укажите количество точек минимума функции.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
38.	Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-6; 6]$. На рисунке (№ 35) изображен график ее производной. Укажите количество точек максимума функции.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

25. Планиметрия

Углы

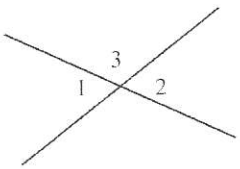


Рис. 1

а) Вертикальные углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 1).

б) Смежные углы составляют в сумме 180°: $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (рис. 1).

Параллельные прямые

Так называются прямые, которые не пересекаются.

Признаки и свойства параллельных прямых

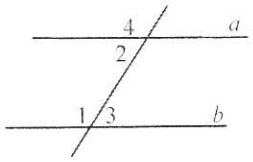


Рис. 2

а) Внутренние накрест лежащие углы равны: $\angle 2 = \angle 3$ (рис. 2).

б) Сумма внутренних односторонних углов равна 180°: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рис. 2).

в) Соответственные углы равны: $\angle 1 = \angle 4$ (рис. 2).

г) Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны: если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

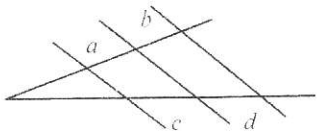


Рис. 3

д) Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны: если $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$.

е) **Теорема Фалеса.** Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (рис. 3).

Треугольники: определения, равенство и подобие

Треугольник называют:

- остроугольным, если все его углы острые;
- прямоугольным, если один из его углов — прямой;
- тупоугольным, если один из его углов тупой.

Если длина большей стороны треугольника ABC со сторонами a, b и c равна c, то можно определить вид треугольника по его углам:

- если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник ABC — остроугольный;
- если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник ABC — прямоугольный;
- если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник ABC — тупоугольный.

Соотношения между сторонами и углами

а) Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше модуля их разности:

$$|b - c| < a < b + c, \quad |a - c| < b < a + c, \quad |a - b| < c < a + b.$$

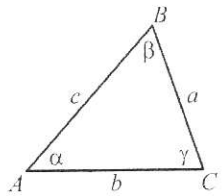


Рис. 4

б) Сумма углов треугольника равна 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (рис. 4).

в) Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

г) Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (рис. 4).

д) Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ (рис. 4).

Признаки равенства треугольников:

1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по двум углам и прилежащей к ним стороне;
3) по трем сторонам.

Треугольники называются **подобными**, если их углы попарно равны, а соответствующие стороны одного пропорциональны сторонам другого. Коэффициент пропорциональности называется **коэффициентом подобия**. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Признаки подобия треугольников:

1) по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними;
2) по двум равным углам;
3) по трем пропорциональным сторонам.

Площадь треугольника:

$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ (h_a — высота, проведенная к стороне a); $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ (рис. 4);

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр треугольника;

$S = \frac{abc}{4R}$; $S = p \cdot r$, где R и r — радиусы описанной около треугольника и вписанной в треугольник окружностей соответственно.

Замечательные линии треугольника

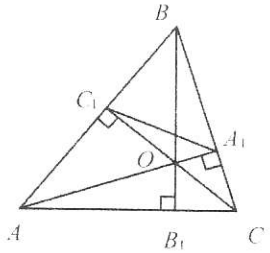


Рис. 5

а) **Высота треугольника** — это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника (обозначение: h_a — высота, проведенная к прямой, содержащей сторону a треугольника).

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке O, называемой ортоцентром треугольника, при этом $AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1 = CO \cdot OC_1$ и $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $k = |\cos\angle B|$ (рис. 5).

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$; $h_a = \frac{2S}{a}$ — из формулы $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

б) **Медиана треугольника** — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны (обозначение: m_a — медиана, проведенная из вершины A к стороне a треугольника).

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины: $AO = OA_1 = 2 : 1$, $BO = OB_1 = 2 : 1$, $CO = OC_1 = 2 : 1$ (рис. 6).

Медиана разбивает треугольник на 2 равновеликих:
$S_{\Delta AB_1} = S_{\Delta CB_1} = S_{\Delta ACC_1} = S_{\Delta BCC_1} = S_{\Delta BAA_1} = S_{\Delta CAA_1}$ (рис. 6).

Три медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих:
$S_{\Delta AC_1O} = S_{\Delta BC_1O} = S_{\Delta BA_1O} = S_{\Delta CA_1O} = S_{\Delta CB_1O} = S_{\Delta AB_1O}$ (рис. 6).

Длина медианы: $(2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

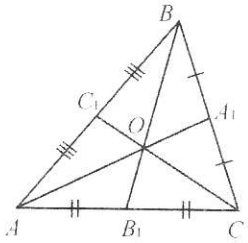


Рис. 6

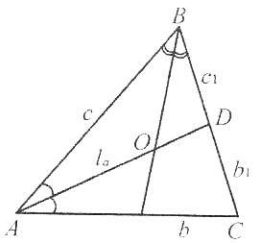


Рис. 7

в) **Биссектриса треугольника** — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне и делящий внутренний угол пополам (обозначение: l_a — биссектриса, проведенная из вершины A к стороне a треугольника).

Каждая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке O — центре окружности, вписанной в данный треугольник.

Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам: $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$ (рис. 7).

Длина биссектрисы: $l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$; $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$; $l_a = bc - b_1c_1$ (рис. 7).

Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник — это треугольник, у которого две стороны равны. Равные стороны называют боковыми, а третью сторону — основанием.

Свойства и признаки равнобедренного треугольника

- Углы при основании равны: $\angle A = \angle C$ (рис. 8).
- Медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают: отрезок AD (рис. 8).

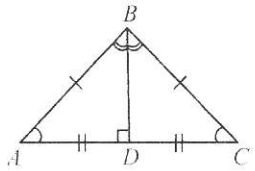


Рис. 8

Равносторонний треугольник

Равносторонний (правильный) треугольник — это треугольник, у которого все стороны равны.

Свойства и признаки равностороннего треугольника

- Все углы равны.
- Каждая из медиан совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины.
- Центры вписанной и описанной окружностей совпадают, их радиусы равны соответственно: $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $R = 2r$, где a — длина стороны треугольника.

Высота треугольника равна $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, его площадь $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, где c — гипотенуза, a и b — катеты треугольника (рис. 9).

Соотношения между сторонами и углами: $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ (рис. 9).

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы и медиане, проведенной к гипотенузе: $R = \frac{c}{2} = m_c$, $r = \frac{a+b-c}{2}$ — радиус вписанной окружности.

Высота, проведенная из вершины прямого угла, образует три подобных треугольника: $\Delta ABC \propto \Delta ACH \propto \Delta CBH$; численно она равна: $h_c^2 = AH \cdot BH$, $h_c = \frac{ab}{c}$ (рис. 9).

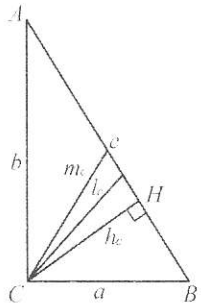


Рис. 9

Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab$, $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c$, $S = pr$.

Четырехугольники

Произвольный четырехугольник

а) Сумма всех внутренних углов равна 360°.

б) В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны: $a + c = b + d$; в этом случае $S = pr$, где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

в) Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

г) Площадь: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$; $S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}ab\sin A + \frac{1}{2}cd\sin C$;

$S_{\Delta BOA} \cdot S_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta AOD}$ (рис. 10).

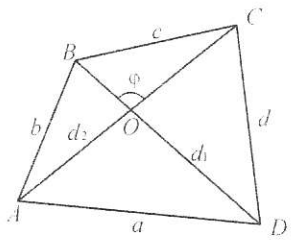


Рис. 10

Параллелограмм

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

- Противоположные стороны попарно равны.
- Противоположные углы попарно равны.
- Смежные углы в сумме дают 180°: $\angle A = \angle C$, $\angle A + \angle B = 180°$ (рис. 11).
- Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (рис. 11).

Диагонали и стороны связаны соотношением: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$;

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по трем сторонам; $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD} = S_{\Delta DOA}$.

Площадь: $S = ah_a = bh_b$; $S = ab\sin A$; $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\angle COD$; $S = 2S_{\Delta ABD}$.

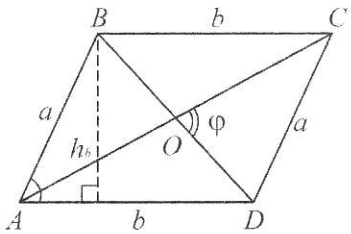


Рис. 11

Ромб

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

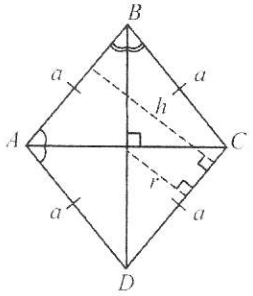


Рис. 12

Свойства и признаки ромба

- Диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам.
- Диагонали являются биссектрисами углов ромба.

Площадь: $S = ah$; $S = \frac{1}{2}d_1d_2$; $S = a^2\sin A$.

Центр вписанной в ромб окружности есть точка пересечения диагоналей ромба, а ее радиус: $r = \frac{h}{2}$ (рис. 12).

Прямоугольник

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

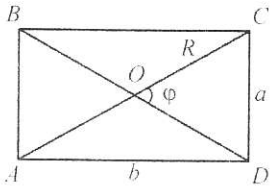


Рис. 13а

Свойство диагоналей

- Диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам.

$d^2 = a^2 + b^2$ — длина диагонали прямоугольника, где a и b — длины сторон прямоугольника.

Около любого прямоугольника можно описать окружность, радиус которой равен $R = \frac{d}{2}$, где d — диагональ прямоугольника (рис. 13а).

Площадь прямоугольника: $S = ab$; $S = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, где φ — угол между диагоналями (рис. 13а).

Квадрат

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

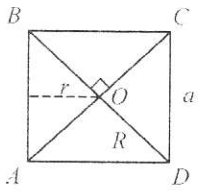


Рис. 13б

Свойство диагоналей

Диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны.

Длина диагонали: $d = a\sqrt{2}$, где a — длина стороны квадрата.

Радиусы вписанной и описанной окружностей: $r = \frac{a}{2}$, $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. 13б).

Площадь: $S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$.

Трапеция

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

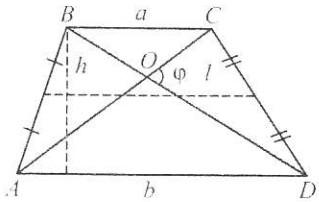


Рис. 14

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме: $l \parallel BC \parallel AD$, $l = \frac{a+b}{2}$ (рис. 14).

Треугольники BOC и DOA — подобны по двум углам, откуда следует равенство: $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$ (рис. 14).

Площадь трапеции: $S = \frac{a+b}{2}\cdot h = lh$; $S = \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi$, где φ — угол между диагоналями (рис. 14).

Правильный шестиугольник

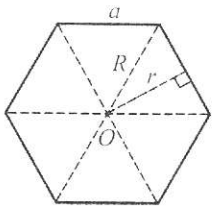


Рис. 15

Радиусы вписанной и описанной окружностей: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R = a$.

Площадь: $S = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Окружности, углы, хорды, касательные

1) Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу: $\alpha = \frac{\beta}{2}$ (рис. 16).

2) Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

3) Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны (рис. 16).

4) Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны от этой хорды, составляют в сумме 180°: $\alpha + \gamma = 180°$ (рис. 17).

5) Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, — прямые.

6) Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны: $AB = AC$ (рис. 18).
7) Если касательная AB и секущая AE проведены из одной и той же точки, то $AB^2 = AD \cdot AE$ (рис. 18).
8) Если две секущие проведены из одной точки, то $AD \cdot AE = AF \cdot AK$ (рис. 18).
9) Если две хорды окружности пересекаются, то $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (рис. 19).

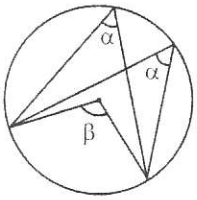


Рис. 16

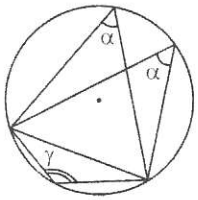


Рис. 17

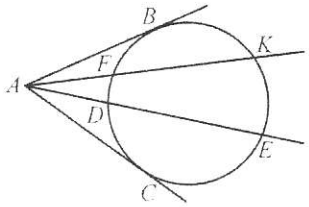


Рис. 18

Длина дуги и окружности

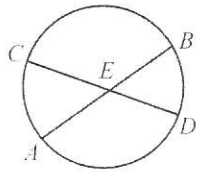


Рис. 19

Длина окружности: $L = 2\pi R$, где R — радиус окружности.

Длина дуги: $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$, где α — величина центрального угла, опирающегося на эту дугу (рис. 20).

Площадь круга, кругового сектора, кругового сегмента

Площадь круга $S = \pi R^2$, где R — радиус круга.

Площадь кругового сектора: $S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$, где α — величина соответствующего центрального угла (рис. 21).

Площадь кругового сегмента: $S = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)R^2$ (рис. 22).

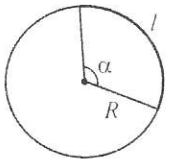


Рис. 20

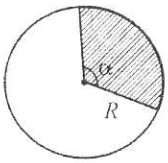


Рис. 21

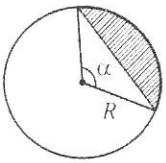
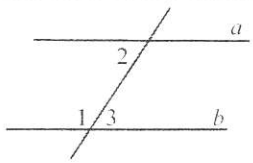
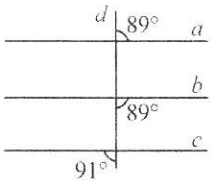


Рис. 22

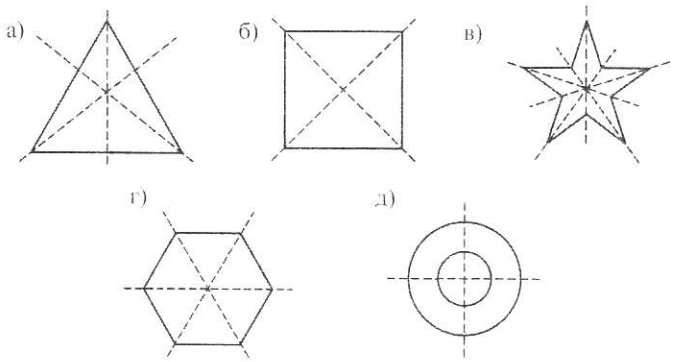
№ п/п	Задания	Варианты ответов
	Углы при параллельных прямых и секущей, треугольник	
1.	Известно, что прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны и $\angle 1 - \angle 2 = 30°$. Укажите значение выражения $\angle 3 + \angle 2$ (в градусах). 	1) 75; 2) 180; 3) 120; 4) 170; 5) 150.
2.	Используя данные, приведенные на чертеже, выберите верные утверждения: а) прямые a и b параллельны; б) прямые a и c параллельны; в) прямые b и c параллельны; г) прямые a и d перпендикулярны; д) прямые c и d перпендикулярны. 	1) а; 2) б; 3) в; 4) а, г; 5) в, д.
3.	Треугольник ABC нельзя построить, если длины его сторон равны: а) 3; 15; 12; б) 7; 9; 15; в) 5; 11; $\sqrt{30}$; г) 7; 15; $\sqrt{70}$; д) $\sqrt[3]{9}$; 1; 4.	1) а; 2) б; 3) б, в; 4) а, в; 5) а, в, д.
4.	Величины углов треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите в градусах меньший из углов, если больший угол равен 105°.	1) 10; 2) 20; 3) 25; 4) 15; 5) 16.
5.	Найдите в градусах угол между биссектрисами внутреннего угла A и внешнего угла A треугольника ABC.	1) 90; 2) 70; 3) 60; 4) 45; 5) 30.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
6.	Дан треугольник с длинами сторон 5, 7 и 11. Определите вид треугольника по величине его углов.	1) остроугольный; 2) прямоугольный; 3) тупоугольный.
7.	Дан треугольник с длинами сторон 5, 3 и $\sqrt{19}$. Определите в радианах средний по величине угол треугольника.	1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{12}$; 5) $\frac{7\pi}{12}$.
8.	Найдите в градусах наибольший угол треугольника со сторонами $\sqrt{17}$, $7\sqrt{2}$ и 9.	1) 60; 2) 90; 3) 120; 4) 150; 5) 160.
9.	В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $\cos\angle A = \frac{3}{5}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.	1) 3,5; 2) 10; 3) 3,6; 4) 7,5; 5) 3,75.
10.	В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 6$, $S_{\triangle ABC} = 27$. Найти длину гипотенузы.	1) 9; 2) $3\sqrt{13}$; 3) 7; 4) 8; 5) 12.
11.	В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 2$, $BC = 4\sqrt{2}$. Найти длину высоты треугольника, проведенной к гипотенузе.	1) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 2) $8\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $4\sqrt{3}$; 5) 2.
12.	В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна $8\sqrt{3}$ и делит гипотенузу на отрезки, разность длин которых равна 16. Найдите площадь треугольника.	1) 232; 2) 236; 3) $128\sqrt{3}$; 4) $124\sqrt{3}$; 5) $188\sqrt{3}$.
13.	В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 6, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9. Найдите площадь треугольника.	1) 32; 2) 36; 3) $12\sqrt{3}$; 4) $21\sqrt{3}$; 5) $18\sqrt{3}$.
14.	В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CH. Найти площадь треугольника, если $\cos\angle A = \frac{7}{25}$, а площадь треугольника ACH равна 9,8.	1) 62,5; 2) 135; 3) 128; 4) 125; 5) 124.
15.	В равнобедренном треугольнике один из углов равен 150°. Найти наибольший внешний угол треугольника (в градусах).	1) 125; 2) 130; 3) 160; 4) 165; 5) 170.
16.	В равнобедренном треугольнике основание равно 6, а угол при основании — 45°. Найти длину биссектрисы, проведенной к основанию.	1) 2,5; 2) 3; 3) 6; 4) $3\sqrt{2}$; 5) $3\sqrt{3}$.
17.	В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 4, а биссектриса угла при основании перпендикулярна боковой стороне. Найдите периметр треугольника.	1) 15; 2) 13; 3) 12; 4) 16; 5) 10.
18.	Один из углов равнобедренного треугольника равен 130°. Найти угол (в градусах), который образует высота, проведенная к боковой стороне с другой боковой стороной.	1) 20; 2) 30; 3) 60; 4) 5; 5) 40.
19.	Угол при основании равнобедренного треугольника ABC равен 30°, $AB = BC = 5\sqrt{3}$. Найдите длину высоты CH треугольника.	1) 2,5; 2) 10; 3) 7,5; 4) $5\sqrt{3}$; 5) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.
20.	Угол при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 15°, а боковая сторона — 8. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.	1) 5; 2) 8; 3) 4; 4) $4\sqrt{3}$; 5) $2\sqrt{3}$.
21.	В правильном треугольнике ABC точка O — точка пересечения высот, $AO = 6\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.	1) 80; 2) 36; 3) 60; 4) $36\sqrt{3}$; 5) $81\sqrt{3}$.
22.	В правильный треугольник вписан круг площадью 4π. Найдите длину окружности, описанной около треугольника.	1) 4; 2) 4π; 3) 8; 4) 8π; 5) 16π.
23.	В правильном треугольнике ABC со стороной 8 проведена биссектриса AL. Найдите расстояние от точки L до стороны AC.	1) 5; 2) 8; 3) 4; 4) $4\sqrt{3}$; 5) $2\sqrt{3}$.
24.	Через центр окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 12, проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между двумя другими сторонами треугольника.	1) 5; 2) 8; 3) 4; 4) $4\sqrt{3}$; 5) 6.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
25.	На стороне AB треугольника ABC взята точка P так, что $AP : PB = 3 : 4$. Через точку P проведена прямая PK ($K \in BC$), параллельная стороне AC. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BPK равна 32.	1) 64; 2) 98; 3) 56; 4) $42\sqrt{3}$; 5) 68.
26.	На стороне AB треугольника ABC взята точка P так, что $AP : PB = 3 : 5$. Через точку P проведена прямая PK ($K \in BC$), параллельная стороне AC. Найдите площадь полученной трапеции, если известно, что площадь треугольника BPK равна 50.	1) 78; 2) 128; 3) 56; 4) 110; 5) 124.
27.	В остроугольном треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 4$, $\sin\angle B = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AC.	1) 5; 2) 8; 3) 4; 4) $4\sqrt{3}$; 5) 6.
28.	Найдите высоту, проведенную к большей стороне AC тупоугольного треугольника ABC, если известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $\sin\angle B = \frac{\sqrt{5}}{3}$.	1) $\sqrt{39}$; 2) 8; 3) $\frac{3\sqrt{306}}{41}$; 4) $\frac{4\sqrt{205}}{41}$; 5) $\sqrt{41}$.
29.	Найти сторону BC треугольника ABC, если известно, что $AB = 4$, $\cos\angle C = \frac{3}{5}$, $\angle A = 30°$.	1) 2,5; 2) 5; 3) 6; 4) 4; 5) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$.
30.	Найти сторону AC треугольника ABC, если известно, что $AB = 2$, $BC = 4$, $\angle C - \angle A = 36°$ и угол C в 4 раза больше угла A.	1) $2\sqrt{3}$; 2) 8; 3) 6; 4) $\sqrt{30}$; 5) $2\sqrt{7}$.
31.	В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 6$, $AC = 4$, AP — биссектриса угла A. Найдите расстояние от точки P до стороны AC треугольника.	1) 2,4; 2) $1{,}6\sqrt{2}$; 3) $1{,}3\sqrt{3}$; 4) 2; 5) 4.
32.	В треугольнике ABC $AB = 10$, $AC = 6$, $\angle C = 90°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника APB, где AP — биссектриса угла A.	1) $3\sqrt{3}$; 2) 6; 3) 4; 4) $2{,}5\sqrt{5}$; 5) 1,6.
33.	Найти радиус круга, имеющего равную с треугольником ABC площадь, если $AB = 6$, $AC = 5$, $\cos\angle A = -\frac{24}{25}$.	1) $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$; 2) $\sqrt{\frac{21}{5\pi}}$; 3) 6π; 4) 2; 5) 4.
34.	Площадь треугольника ABC равна 30. На стороне AC взята точка P так, что $AP : PC = 3 : 7$. Найдите длину стороны квадрата, равновеликого треугольнику ABP.	1) 25; 2) 5; 3) 9; 4) 3; 5) 2.
35.	Площадь треугольника ABC равна 18. На стороне AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, а на стороне BC — точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника BPM.	1) 6,4; 2) 6; 3) 9; 4) $3\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{2}{3}$.
36.	В треугольнике ABC проведены средние линии MP, PN и NM. Найдите площадь треугольника MPN, если площадь треугольника ABC равна 36.	1) 6; 2) 9; 3) 12; 4) $4\sqrt{3}$; 5) 8.
37.	Длины сторон треугольника ABC относятся как 5 : 5 : 6. Точки M, P и N — середины сторон треугольника. Площадь треугольника NMP равна 48. Найти периметр треугольника ABC.	1) 15; 2) 36; 3) 32; 4) 64; 5) 96.
38.	Найти длину высоты AH треугольника ABC, если $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$.	1) 4; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 3; 4) 6; 5) 5.
39.	Длины медиан, проведенных к катетам прямоугольного треугольника, равны $\sqrt{601}$ и $2\sqrt{61}$. Найдите периметр треугольника.	1) 56; 2) 62; 3) 58; 4) 60; 5) 65.
40.	В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle B = 45°$ и радиусом описанной окружности, равным $6\sqrt{2}$, проведены высоты AM и CH. Найдите длину отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около треугольников BCH и ABM.	1) 4; 2) $2\sqrt{3}$; 3) 6; 4) 3; 5) $3\sqrt{2}$.
41.	В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CH, причем $AM : CH = 3 : 4$. Найти меньшую сторону треугольника, если $AC = 8$, $\sin\angle D = \frac{\sqrt{55}}{8}$	1) 4; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 6; 4) 8; 5) 5.
42.	В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° радиус описанной окружности равен $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.	1) $6\sqrt{6}$; 2) $6(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; 3) $4(\sqrt{6}-\sqrt{3})$; 4) $6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; 5) $4(\sqrt{6}+\sqrt{3})$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
43.	Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке P. Найдите длину отрезка CP, если $AB = AC = 5$, $BC = 8$.	1) 1,5; 2) 2; 3) 1; 4) $2\sqrt{2}$; 5) $\frac{4\sqrt{10}}{3}$.
	Параллелограмм, ромб	
44.	В параллелограмме $ABCD$ с площадью 6 $AB = 2$, $\angle A = 30°$. Найдите периметр параллелограмма.	1) 16; 2) 21; 3) 18; 4) 20; 5) 22.
45.	В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, BM — биссектриса угла B, где точка M — середина стороны AD. Найдите периметр параллелограмма.	1) 10; 2) 8; 3) 9; 4) 18; 5) 20.
46.	В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 6$, $\angle BAD = \angle CBD = 45°$. Найдите диагональ AC.	1) 5; 2) 8; 3) 9; 4) $6\sqrt{5}$; 5) 6.
47.	Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют со стороной CD углы 62° и 58°, $AO = 8$, $DO = 6$. Найдите длину высоты, проведенной к большей стороне параллелограмма.	1) $\frac{12\sqrt{57}}{19}$; 2) $\frac{12\sqrt{19}}{3}$; 3) 68; 4) $12\sqrt{3}$; 5) 72.
48.	Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а диагонали относятся как $\sqrt{3} : \sqrt{7}$. Найдите площадь параллелограмма.	1) $2\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt{3}$; 3) 8; 4) 6; 5) $6\sqrt{2}$.
49.	В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 3$, $BC = 4$, диагональ $AC = \sqrt{34}$. Найдите большую высоту параллелограмма.	1) 2,4; 2) 3,6; 3) $\frac{\sqrt{55}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{62}}{2}$; 5) 4.
50.	Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Высота BH равна $2\sqrt{3}$, $\angle A = 60°$, $HM = 1$. Найти площадь параллелограмма.	1) 16; 2) 24; 3) 32; 4) 18; 5) 20.
51.	Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точка M — середина отрезка AO. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника ABM равна 2.	1) 10; 2) 8; 3) 12; 4) 16; 5) 20.
52.	$ABCD$ — параллелограмм с меньшей стороной $AD = 8$ и углом $\angle BAD = \arccos 0{,}8$. Известно, что вершины A, B и D параллелограмма принадлежат окружности радиуса 5. Найдите площадь параллелограмма.	1) 30; 2) 48; 3) 24; 4) 46; 5) 50.
53.	Биссектрисы внутренних углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите площадь параллелограмма, если $BM = 3$, $AM = 4$, $AD = 6$.	1) 28,8; 2) 30,6; 3) 32,4; 4) 26,8; 5) 28,6.
54.	На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка O. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке M, а прямую CD — в точке P. Найдите длину отрезка AO, если $OM = 6$, $PM = 2$.	1) 4,2; 2) 6; 3) 5; 4) $4\sqrt{3}$; 5) 5,6.
55.	Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M на стороне AD. Найдите площадь параллелограмма, если $BM = 8$, $BC = 4\sqrt{5}$.	1) 48; 2) 88; 3) 92; 4) 95; 5) 96.
56.	Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 7$, $AD = 8$ и диагональю $BD = \sqrt{57}$. Найдите расстояние от точки M до диагонали BD.	1) 3,5; 2) 4; 3) 4,5; 4) $1{,}5\sqrt{19}$; 5) $\frac{14}{\sqrt{19}}$.
57.	Высота ромба равна $4\sqrt{3}$, а один из углов — 120°. Найдите периметр ромба.	1) 32; 2) 48; 3) 28; 4) 36; 5) 44.
58.	Диагонали ромба с площадью $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найдите высоту ромба.	1) $2\sqrt{3}$; 2) 6; 3) 2; 4) 3; 5) 1,5.
59.	Сторона ромба равна 30. Соединив последовательно середины его сторон, получили прямоугольник с периметром 84. Найдите площадь прямоугольника.	1) 384; 2) 532; 3) 620; 4) 614; 5) 584.
60.	В ромб $ABCD$ с площадью $16\sqrt{7}$ и стороной 8 вписана окружность, которая касается стороны BC в точке M. Найдите $\lvert BM - MC \rvert$.	1) 6; 2) 2,5; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
61.	Сторона ромба равна $8\sqrt{2}$, а острый угол — 45°. Найти площадь круга, вписанного в ромб.	1) 10π; 2) 8π; 3) 12π; 4) 16π; 5) 20π.
62.	Окружность радиуса 2 вписана в ромб $ABCD$ и касается стороны BC в точке M, причем $BM = 4$. Найти площадь ромба.	1) 10; 2) 5; 3) 12; 4) 16; 5) 20.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
	Трапеция	
63.	В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$): $AB = 12$, $\angle B = 120°$, $AD = 16$. Найдите площадь трапеции.	1) $16\sqrt{3}$; 2) $60\sqrt{3}$; 3) 16; 4) 32; 5) 35.
64.	В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) диагональ AC является биссектрисой угла C. $BC = 4$, $AD = 16$. Найдите площадь трапеции.	1) $16\sqrt{30}$; 2) $32\sqrt{33}$; 3) 220; 4) $20\sqrt{55}$; 5) 350.
65.	Большее основание и большая боковая сторона прямоугольной трапеции равны 12 и 6 соответственно, а ее острый угол — 60°. Найдите длину средней линии трапеции.	1) 10; 2) 9,5; 3) 10,5; 4) 11; 5) 11,5.
66.	Длина большей диагонали прямоугольной трапеции равна $\sqrt{29}$, средняя линия равна 4, а площадь трапеции — 8. Найдите острый угол трапеции в градусах.	1) 30; 2) 45; 3) 15; 4) 60; 5) 75.
67.	O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$). Найдите площадь трапеции, если $BC = 4$, длина отрезка BO составляет 40 % от длины отрезка BD, а высота OH треугольника BOC равна 10.	1) 245; 2) 250; 3) 212; 4) 216; 5) 208.
68.	O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$). Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника BOC равна 6, $BO : DO = 2 : 5$.	1) 78; 2) 73,5; 3) 76,5; 4) 72; 5) 75.
69.	O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Через точку O проведен отрезок MN, параллельный основаниям. Если $AD = 12$, $BC = 20$, то длина отрезка MN равна:	1) 13; 2) 14; 3) 15; 4) 16; 5) 18.
70.	Меньшее основание трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) равно 5, а ее боковые стороны равны 8 и 6. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под прямым углом в точке P. Найдите длину средней линии треугольника APD.	1) 7; 2) 7,5; 3) 15; 4) 12; 5) 5,6.
	Окружность, вписанные и описанные многоугольники	
71.	Длина окружности равна 8π, а длина ее дуги — 2π. Найти величину (в градусах) вписанного угла, который опирается на эту дугу.	1) 30; 2) 45; 3) 90; 4) 60; 5) 120.
72.	Дан круг площадью 36π. Площадь его кругового сектора, ограниченного дугой AB, равна 4π. Найдите величину (в градусах) вписанного угла, который опирается на дугу AB.	1) 10; 2) 35; 3) 20; 4) 40; 5) 60.
73.	Расстояние от точки A, лежащей вне окружности, до ее ближайшей точки равно 2. Из точки A к окружности проведена касательная, расстояние от точки A до точки касания — 6. Найдите диаметр окружности.	1) 4; 2) 8; 3) 10; 4) 16; 5) 20.
74.	Из точки A, лежащей вне окружности радиуса 10 и удаленной от ее центра на расстоянии $10\sqrt{2}$, проведены две касательные к данной окружности. Найти расстояние между точками касания.	1) $10\sqrt{2}$; 2) $10\sqrt{3}$; 3) 10; 4) 12; 5) 15.
75.	Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Найдите угол B треугольника (в градусах), если известно, что $\angle OAC = 12°$, $\angle OCA = 34°$.	1) 30; 2) 45; 3) 80; 4) 60; 5) 67.
76.	Точки A, B, C и D принадлежат окружности с центром в точке O и радиусам 6 так, что точки C и D лежат по разные стороны от хорды AB. Найдите величину угла CDB (в градусах), если $AB = 12$, $BC = 6$.	1) 30; 2) 45; 3) 80; 4) 60; 5) 90.
77.	В окружность радиусом 4 вписан треугольник ABC, причем $AB = 8$, $BC = AC$. Точка D принадлежит окружности и расположена с точкой C по одну сторону от хорды AB. Найдите величину угла BDC (в градусах).	1) 120; 2) 45; 3) 60; 4) 90; 5) 135.
78.	Хорда AB и диаметр CD окружности с центром в точке O пересекаются в точке K, причем $OK = 2$, $AK = 3$, $AB = 7$. Найдите диаметр окружности.	1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 6; 5) 8.
79.	Вершины A, D и C четырехугольника $ABCD$ принадлежат окружности, а вершина B находится вне ее, причем сторона BC касается окружности в точке C. Окружность делит сторону AB на отрезки длиной 2 и 6, считая от вершины B. Найдите длину стороны BC.	1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 6; 5) 8.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
80.	Равнобедренная трапеция с боковой стороной 5 описана вокруг окружности радиуса 1,5. Найдите площадь трапеции.	1) 30; 2) 45; 3) 20; 4) 40; 5) 15.
81.	Около трапеции с основаниями 10 и 22 описана окружность. Найдите площадь трапеции, если сумма ее боковых сторон равна 20.	1) 128; 2) 64; 3) 256; 4) 90; 5) 136.
82.	Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию, делит точкой касания ее боковую сторону длиной 15 в отношении 2 : 1. Найдите площадь трапеции.	1) $130\sqrt{2}$; 2) 45; 3) $150\sqrt{2}$; 4) 40; 5) $72\sqrt{3}$.
83.	Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AD = 4$, $DC = 3$, диагональю $BD = 5$ и равными углами $\angle A = \angle C$ вписан в окружность. Найдите площадь четырехугольника.	1) 6; 2) 8; 3) 12; 4) 20; 5) 15.
84.	Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 4. Точка касания делит гипотенузу на отрезки длиной 12 и 8. Найдите площадь треугольника.	1) 128; 2) 64; 3) 156; 4) 96; 5) 136.
85.	В прямоугольном треугольнике с гипотенузой, равной 13, радиус вписанной окружности равен 2. Найдите синус меньшего острого угла треугольника.	1) $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0,4; 5) 0,6.
86.	Отношение длин катетов прямоугольного треугольника равно 0,75. Длина большего из отрезков, на которые точка касания вписанной в треугольник окружности делит гипотенузу, равна 3. Найдите радиус вписанной окружности.	1) 0,5; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
	Центрально-симметричные и осесимметричные фигуры	
87.	Из фигур *а—д*, изображенных на рисунке, выбрать все центрально-симметричные. 	1) а, б, в, г, д; 2) б, в, г, д; 3) в, г, д; 4) б, г, д; 5) б, в, д.
88.	Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник?	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8.
89.	Сколько осей симметрии имеет квадрат?	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8.

26. Стереометрия

26.1. Параллельность прямых и плоскостей. Скрещивающиеся прямые

Две **прямые в пространстве** называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Признак параллельности прямых. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Две *плоскости* называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Свойства параллельных прямых и плоскостей

1. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны.

3. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Две прямые называются *скрещивающимися*, если не существует плоскости, в которой они обе лежат.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а вторая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная второй прямой, и притом только одна.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным прямым.

26.2. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Две *прямые в пространстве* называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°.

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Теорема о трех перпендикулярах.

Прямая a, проведенная в плоскости α и перпендикулярная проекции HM наклонной AM на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной (рис. 1).

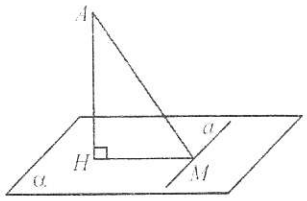


Рис. 1

Верно и обратное: прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и ее проекции на эту плоскость.

Углом между плоскостью и прямой, пересекающей данную плоскость и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей границей. Для измерения двугранного угла, образованного полуплоскостями α и β, пересекающимися по прямой l, необходимо провести через любую точку M прямой l прямые MK и MH, перпендикулярные прямой l в полуплоскостях α и β соответственно.

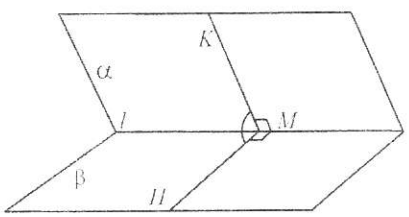


Рис. 2

Градусная мера полученного при этом угла KMH (линейного угла данного двугранного угла) называется градусной мерой данного двугранного угла (рис. 2).

Две *плоскости* называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Свойства перпендикулярных прямых и плоскостей

1. Если две прямые перпендикулярны к одной плоскости, то они параллельны.

2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

3. Прямая, проведенная в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно прямой, по которой они пересекаются, перпендикулярна другой плоскости.

Измерение расстояний между объектами в пространстве

- *Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной плоскости.
- *Расстоянием между параллельными плоскостями* называется расстояние от произвольной точки одной из плоскостей до другой плоскости.
- *Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью* называется расстояние от произвольной точки прямой до плоскости.
- *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется расстояние от одной из прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.

26.3. Многогранники

Призма

$V = S_{осн} \cdot h$ — объем любой призмы;

$V = S_{сеч} \cdot l$ — объем наклонной призмы, где $S_{сеч}$ — площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам и пересекающей каждое из них;

$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$ — площадь боковой поверхности прямой призмы (у прямой призмы высота равна боковому ребру);

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ — площадь полной поверхности любой призмы.

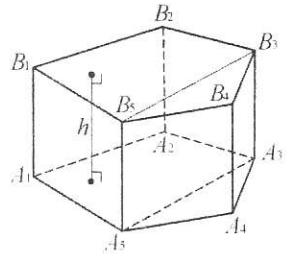


Рис. 3

Диагональное сечение призмы — это сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

У прямой призмы диагональное сечение — прямоугольник, у наклонной — параллелограмм. На рис. 3 изображено одно из диагональных сечений прямой призмы — прямоугольник $A_5B_5B_3A_3$.

Параллелепипед — это призма, основанием которой является параллелограмм.

- Все грани параллелепипеда — параллелограммы.
- Противолежащие грани равны и лежат в параллельных плоскостях.
- Все диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех ребер:

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

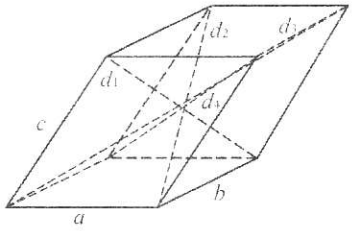


Рис. 4

Прямой параллелепипед — это параллелепипед, боковые грани которого — прямоугольники, а основания — параллелограммы.

Прямоугольный параллелепипед — это прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники.

$V = abc$, где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда;

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где d — диагональ параллелепипеда.

$S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$

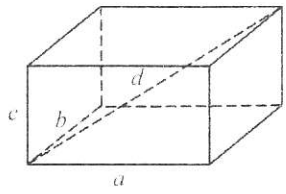


Рис. 5

Куб — это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны.

Диагональ куба: $d^2 = 3a^2$, где a — длина ребра куба.

Площадь поверхности: $S_{полн} = 6a^2$.

Объем куба: $V = a^3$.

Пирамида (рис. 6)

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ — объем любой пирамиды;

$V = \frac{1}{3} S_{полн} \cdot r$, где r — радиус сферы, вписанной в пирамиду, $S_{полн}$ — площадь полной поверхности пирамиды;

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ — площадь полной поверхности любой пирамиды;

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$ — площадь боковой поверхности правильной пирамиды, где l — апофема (высота боковой грани).

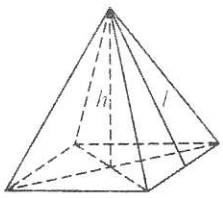


Рис. 6

Если все боковые ребра пирамиды равны (или все боковые ребра образуют равные углы с основанием), то основание высоты пирамиды — это центр окружности, описанной около основания.

Если все боковые грани пирамиды образуют с основанием равные двугранные углы (или апофемы всех боковых граней пирамиды равны), то основание высоты пирамиды — это центр окружности, вписанной в основание.

Усеченная пирамида (рис. 7)

$V = \frac{1}{3} h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где h — высота, S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды;

$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$, где P_1 и P_2 — периметры оснований, l — апофема усеченной пирамиды.

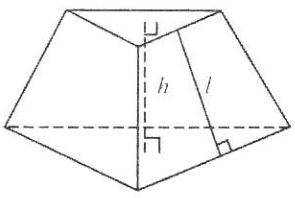


Рис. 7

26.4. Тела вращения

Цилиндр (рис. 8)

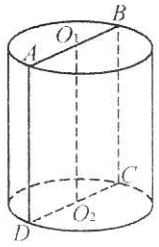


Рис. 8

O_1O_2 — ось цилиндра, $O_1O_2 = h$ — его высота;
$R = O_1B$ — радиус цилиндра;
прямоугольник $ABCD$ — осевое сечение.
Если осевое сечение — квадрат, то цилиндр называют *равносторонним*.

$V = S_{осн} \cdot h = \pi R^2 \cdot h$ — объем цилиндра;

$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$ — площадь боковой поверхности цилиндра;

$S_{полн} = S_{бок} + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h)$ — площадь полной поверхности цилиндра.

Конус (рис. 9)

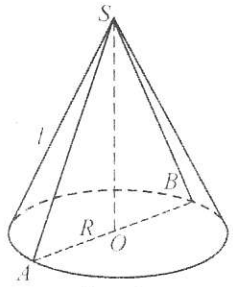


Рис. 9

SO — ось конуса, $SO = h$ — высота конуса; AO — его радиус;
$AS = l$ — образующая; равнобедренный треугольник ASB — осевое сечение.

Если осевое сечение конуса — равносторонний треугольник, то конус называется *равносторонним*.

$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$ — объем конуса;

$S_{бок} = \pi R \cdot l$ — площадь боковой поверхности конуса;

$S_{полн} = S_{бок} + \pi R^2 = \pi R(R + l)$ — площадь полной поверхности конуса.

Усеченный конус (рис. 10)

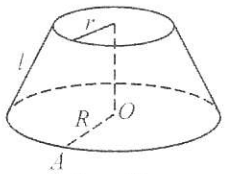


Рис. 10

$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$, где R и r — радиусы оснований;

$S_{бок} = \pi(R + r)l$, где l — образующая усеченного конуса.

Шар, сфера (рис. 11)

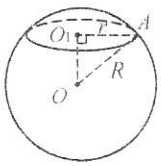


Рис. 11

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара, где $OA = R$ — радиус шара;

$S = 4\pi R^2$ — площадь сферы, где R — радиус сферы.

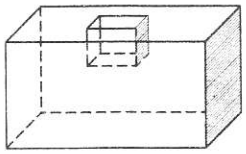
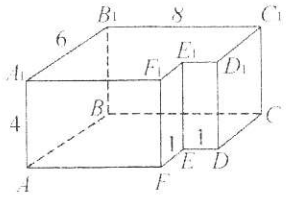
Сечение шара плоскостью — круг, центр которого есть основание перпендикуляра O_1O_2, проведенного из центра шара — точки O к секущей плоскости, $O_1A = r$ — радиус данного круга.

Сечение сферы плоскостью — окружность.

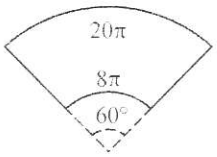
№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Площадь треугольника AB_1C равна $8\sqrt{3}$. Найдите площадь поверхности куба.	1) 48; 2) 96; 3) 52; 4) 84; 5) 98.
2.	Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, если ее боковое ребро равно 5, а радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $\sqrt{3}$.	1) $15\sqrt{3}$; 2) 90; 3) 50; 4) 45; 5) 60.
3.	Радиус окружности, вписанной в одну из граней правильного тетраэдра, равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь поверхности тетраэдра.	1) $18\sqrt{3}$; 2) 104; 3) 72; 4) $72\sqrt{3}$; 5) $36\sqrt{3}$.
4.	Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в 3 раза больше ребра основания, а сумма длин всех ребер пирамиды равна 36. Найдите длину апофемы пирамиды.	1) $\sqrt{35}$; 2) 8; 3) $1{,}5\sqrt{35}$; 4) $3\sqrt{35}$; 5) 9.
5.	В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с радиусом описанной окружности, равным 5, и радиусом вписанной в него окружности, равным 2. Боковое ребро призмы равно 9. Найдите боковую поверхность призмы.	1) 148; 2) 196; 3) 216; 4) 184; 5) 198.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
6.	$ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. O — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Прямая l проходит через середину ребра AA_1 и параллельна прямой OA. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри призмы, если $AB = 6$, $BB_1 = 4$.	1) $2\sqrt{3}$; 2) 3,5; 3) $2\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{7}$; 5) $1{,}5\sqrt{7}$.
7.	$SABC$ — правильная пирамида. Через точку M, принадлежащую ребру SA так, что $SM : MA = 1 : 2$, проведена прямая l, параллельная апофеме SK грани SBC. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что длина отрезка прямой l, расположенного внутри пирамиды, равна $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, а боковое ребро пирамиды равно 3.	1) $6\sqrt{2}$; 2) 15; 3) $12\sqrt{2}$; 4) $5\sqrt{3}$; 5) $1{,}5\sqrt{3}$.
8.	Через вершину угла C треугольника ABC ($AB = BC = 5$, $AC = 8$) проведена плоскость α, параллельная стороне AB. Биссектриса угла A треугольника пересекает плоскость α в точке O. Найдите длину отрезка CO.	1) $4\sqrt{2}$; 2) 8; 3) 5; 4) 6; 5) 9.
9.	Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведена плоскость α, параллельная гипотенузе AB. Биссектриса угла A треугольника пересекает плоскость α в точке O. Найдите длину отрезка AO, если $AB = 10$, $BC = 8$.	1) $5\sqrt{5}$; 2) 5; 3) $4\sqrt{6}$; 4) $4{,}8\sqrt{5}$; 5) $6\sqrt{5}$.
10.	Отрезок AB не пересекает плоскость α. Точка C лежит на отрезке AB так, что $BC : CA = 1 : 5$. Через точки A, B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину отрезка CC_1, если $BB_1 = 14$, $AA_1 = 2$.	1) 11; 2) 10; 3) 12; 4) 13; 5) 9.
11.	В тетраэдре $DABC$ CO — медиана грани DAC, DF — биссектриса треугольника DBC. Укажите взаимное расположение прямых OC и DF.	1) пересекаются; 2) скрещиваются; 3) параллельны.
12.	В тетраэдре $DABC$ точка F — середина BC, точка O — середина AD. Прямая m проходит через точку O и середину отрезка AF, прямая l — через середины отрезков CD и FC. Укажите взаимное расположение прямых m и l.	1) пересекаются; 2) скрещиваются; 3) параллельны.
13.	В тетраэдре $DABC$ точка O — середина ребра AD, точки F и M — середины ребер BC и CD соответственно. Укажите взаимное расположение прямых OB и FM.	1) пересекаются; 2) скрещиваются; 3) параллельны.
14.	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Точка M — середина ребра B_1C_1. Укажите взаимное расположение прямых AM и DC_1.	1) пересекаются; 2) скрещиваются; 3) параллельны.
15.	В правильном тетраэдре $DABC$ точки O и E — середины ребер AD и DC, а точки T и K — середины ребер AC и AB соответственно. Найдите угол (в градусах) между прямыми OE и TK.	1) 30; 2) 90; 3) 75; 4) 45; 5) 60.
16.	В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и T — середины ребер AD и CD соответственно. Найдите угол (в градусах) между прямыми MT и B_1A_1.	1) 30; 2) 90; 3) 75; 4) 45; 5) 60.
17.	В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол (в градусах) между прямыми B_1A и C_1A_1.	1) 30; 2) 90; 3) 75; 4) 45; 5) 60.
18.	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точки F и K — середины ребер C_1D_1 и BA соответственно. Найдите косинус угла между прямыми FD и KA_1.	1) 0,5; 2) 0,9; 3) 0,6; 4) 0,8; 5) 0,3.
19.	В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, точка M — середина ребра SB. Найдите косинус угла между прямыми AM и BD.	1) 0,6; 2) 0,8; 3) 0,7; 4) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; 5) $\frac{\sqrt{30}}{6}$.
20.	$SABCD$ — правильная пирамида. Точка P принадлежит ребру SD так, что $SP : PD = 1 : 2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку P и параллельной прямым AS и CD, если $SD = 6$, $AD = 3$.	1) $2\sqrt{15}$; 2) 15; 3) $2\sqrt{14}$; 4) $5\sqrt{3}$; 5) $4\sqrt{15}$.
21.	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Через точку M, лежащую на ребре AB ($AM : MB = 3 : 1$), проведено сечение, параллельное плоскости AB_1C. Найдите площадь сечения, если радиус окружности, описанной около грани куба, равен $4\sqrt{2}$.	1) $\sqrt{15}$; 2) 9; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{3}$; 5) $4\sqrt{3}$.
22.	$ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма со стороной основания $AB = 12$ и боковым ребром $AA_1 = 16$. Точка O — центр треугольника ABC. Найдите периметр сечения призмы плоскостью, проходящей через прямую l ($O \in l$, $l \parallel BC$) и параллельной прямой AB_1.	1) 36; 2) 38; 3) 33; 4) $33\frac{1}{3}$; 5) $33\frac{2}{3}$.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
23.	В пирамиде $DABC$ через точку P, делящую высоту пирамиды DO в отношении $DP : PO = 2 : 7$, проведено сечение плоскостью, параллельной основанию. Найдите площадь основания, если площадь полученного сечения равна 4.	1) 30; 2) 18; 3) 81; 4) 36; 5) 14.
24.	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Найдите площадь основания параллелепипеда, если $AA_1 = 4$, $AB = 2$, $BD_1 = 6$.	1) 8; 2) 9; 3) 15; 4) 16; 5) 6.
25.	$ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$, $AC = 6$, $BC = 4$). Высота призмы равна 10. Найдите $\sqrt{13}\,S_0$, где S_0 — площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середину ребра AB и перпендикулярной этому ребру.	1) 120; 2) 138; 3) 195; 4) $82\frac{1}{3}$; 5) $86\frac{2}{3}$.
26.	$SABC$ — пирамида, ребро SA которой перпендикулярно плоскости грани ABC, $\angle CAB = 90°$, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{2}$. Найдите угол (в градусах) наклона ребра SC к плоскости ABC, если площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую SA и перпендикулярной ребру BC, равна $3{,}2\sqrt{15}$.	1) 30; 2) 90; 3) 75; 4) 45; 5) 60.
27.	Из вершины B треугольника ABC восстановлен перпендикуляр BP к плоскости треугольника. Найдите длину отрезка BP, если $BC = 6\sqrt{2}$, $AB = 3\sqrt{26}$, $AP - PC = 3\sqrt{2}$.	1) $6\sqrt{2}$; 2) 15; 3) $6\sqrt{6}$; 4) $5\sqrt{3}$; 5) $1{,}5\sqrt{3}$.
28.	Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат, а боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания BD и перпендикулярной ребру SC, если двугранный угол при ребре CD равен 60°, $BD = 6\sqrt{2}$.	1) $3{,}2\sqrt{15}$; 2) 16; 3) $4\sqrt{15}$; 4) $5\sqrt{2}$; 5) $3{,}6\sqrt{15}$.
29.	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Известно, что $A_1C = 12\sqrt{6}$. Найдите длину проекции диагонали B_1D на плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$.	1) 30; 2) 24; 3) 25; 4) 28; 5) 12.
30.	$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, $AB = 4$, $BB_1 = 3$. Найдите синус угла между прямой B_1C и плоскостью AA_1C_1.	1) 0,6; 2) 0,8; 3) 0,7; 4) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
31.	$ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$, $BC = 8$). Высота призмы равна 6. Найдите расстояние между прямыми A_1C_1 и B_1C.	1) 3,2; 2) 4,8; 3) 2,5; 4) 3,8; 5) 5,6.
32.	$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. Найдите расстояние от прямой A_1C_1 до плоскости AB_1C, если $BB_1 = 12$, $BC = 4$.	1) $\sqrt{13}$; 2) 3,8; 3) 4,2; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{12}{\sqrt{13}}$.
33.	Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Из точки O восстановлен перпендикуляр $OH = 4\sqrt{2}$ к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки H до прямой AC, если известно, что $AB = BC = 8$, $\angle BAC = 30°$.	1) $4\sqrt{3}$; 2) 8; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{2}$; 5) $5\sqrt{3}$.
34.	В пирамиде $DABC$ ребро AD перпендикулярно плоскости ABC. Найдите расстояние от вершины D до прямой BC, если известно, что $AB = 9$, $BC = 10$, $AC = 11$, $AD = 3$.	1) 13; 2) 9; 3) 12; 4) 15; 5) 6.
35.	Ребро AD тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC. Известно, что $AB = 12$, $\angle ABC = 30°$, $\angle ACB = 90°$. Угол между плоскостями DBC и ABC равен 45°. Найдите расстояние от точки A до плоскости грани DBC.	1) $3\sqrt{2}$; 2) 8; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $4\sqrt{3}$; 5) $5\sqrt{3}$.
36.	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Найдите $\frac{5\sqrt{3}}{3}S_{бок}$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности параллелепипеда, если известно, что $AB = 6$, $BC = 8$, а плоскость AB_1C образует с основанием параллелепипеда угол 60°.	1) 648; 2) 564; 3) 672; 4) 684; 5) 698.
37.	В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб со стороной 16 и углом $\angle ABC = 135°$. Грани ASB и SBC перпендикулярны основанию, а две другие боковые грани образуют с основанием углы, равные $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	1) 248; 2) 256; 3) 272; 4) 284; 5) 238.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
38.	Сторона AD параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости α, а плоскость параллелограмма образует с плоскостью α угол 60°. Найдите синус угла наклона прямой AB к плоскости α, если $AB = 16$, $BC = 9$, $\angle BCD = 135°$.	1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0,2; 4) 0,6; 5) $\frac{2}{\sqrt{6}}$.
39.	Найдите площадь поверхности тела, полученного из прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2, 3 и 4 выпиливанием кубика с ребром 1 так, как показано на рисунке. 	1) 52; 2) 53; 3) 54; 4) 55; 5) 56.
40.	Найти объем тела, описанного в задаче № 39.	1) 24; 2) 23; 3) 25; 4) 22; 5) 26.
41.	Диагональное сечение наклонного параллелепипеда, проходящее через большую диагональ основания, перпендикулярно основанию. Найдите площадь этого сечения, если основание параллелепипеда — параллелограмм со сторонами 2 и 5 и площадью $5\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 8 и наклонено к основанию под углом 60°.	1) $13\sqrt{2}$; 2) 28; 3) $20\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{13}$; 5) $15\sqrt{13}$.
42.	На рисунке изображена прямая шестиугольная призма, полученная из прямоугольного параллелепипеда выпиливанием меньшего прямоугольного параллелепипеда с указанием ее размеров. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребро BB_1 и точку пересечения диагоналей A_1C и AC_1 призмы. 	1) 32; 2) 35; 3) 34; 4) 36; 5) 36,5.
43.	В наклонной треугольной призме площади двух боковых граней равны 8 и 12, а угол между ними — 60°. Боковое ребро призмы равно 4. Найдите боковую поверхность призмы.	1) $25\sqrt{3}$; 2) 42; 3) $4(5+\sqrt{7})$; 4) $128\sqrt{3}$; 5) 40.
44.	Основание наклонной призмы — равнобедренный треугольник с основанием 6 и углом при вершине 120°. Одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от каждой вершины нижнего основания. Боковое ребро составляет угол 60° с основанием. Найдите объем призмы.	1) 136; 2) 128; 3) 212; 4) 162; 5) 156.
45.	Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине пирамиды равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	1) $12\sqrt{3}$; 2) 24; 3) $15\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{6}$; 5) 26.
46.	Боковая грань правильной треугольной пирамиды наклонена к основанию под углом 60°, а высота пирамиды равна 3. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	1) $18\sqrt{3}$; 2) 18; 3) $36\sqrt{3}$; 4) $48\sqrt{3}$; 5) 36.
47.	Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен 120°, а сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите боковую поверхность пирамиды.	1) $4,2\sqrt{3}$; 2) 8,8; 3) 12,4; 4) $4,5\sqrt{3}$; 5) $6,75\sqrt{2}$.
48.	Боковая грань правильной треугольной пирамиды наклонена к основанию под углом, равным $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$, а апофема равна 6. Найдите ее объем.	1) $8\sqrt{3}$; 2) 18; 3) $9\sqrt{11}$; 4) $27\sqrt{11}$; 5) 16.
49.	Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 10 и образует с плоскостью диагонального сечения, пересекающей данное ребро, угол 30°. Найдите объем пирамиды.	1) $62,5\sqrt{3}$; 2) 124; 3) 160; 4) $\frac{123\sqrt{6}}{4}$; 5) $\frac{250\sqrt{3}}{3}$.
50.	Все ребра правильной четырехуголной пирамиды равны, а диагональ основания равна $8\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	1) $64\sqrt{3}$; 2) 96; 3) $192\sqrt{3}$; 4) $57\sqrt{3}$; 5) 128.
51.	В правильной пирамиде $SABC$ сторона основания равна 12, а радиус окружности, описанной около боковой грани пирамиды, равен 6. Найдите объем пирамиды $DABC$, где точка D принадлежит ребру SB и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины S.	1) $42,3\sqrt{3}$; 2) $43,2\sqrt{2}$; 3) 124; 4) $45,2\sqrt{3}$; 5) 98.

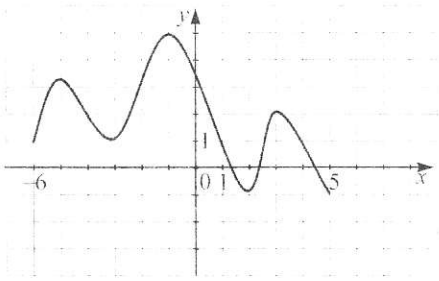
№ п/п	Задания	Варианты ответов
52.	В треугольной пирамиде $SABC$ углы CBA, SBC и SBA — прямые, $AS = AC = 3\sqrt{2}$, $SC = 4$. Найдите длину высоты пирамиды, проведенной из вершины B.	1) 2,5; 2) 2,4; 3) 2; 4) $\frac{2\sqrt{35}}{7}$; 5) 3.
53.	В треугольной пирамиде все боковые ребра равны по 8,25, а ребра основания — 9, 10 и 11. Найдите объем пирамиды.	1) 82,8; 2) 85,6; 3) 82,5; 4) 86; 5) 86,5.
54.	Основание пирамиды — прямоугольник, одна из сторон которого в 2 раза больше другой, а все боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Высота пирамиды равна $\sqrt[4]{15}$. Найдите $3\sqrt[4]{15}V$, где V — объем пирамиды.	1) 12; 2) 15; 3) 10; 4) 8; 5) 6.
55.	Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с острым углом 30°, а все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна $12\sqrt{3}$.	1) 2120; 2) 1580; 3) 2304; 4) 2028; 5) 2156.
56.	Боковые грани пирамиды $SABC$ наклонены к основанию под углом 45°, а в основании лежит прямоугольный треугольник ABC с катетом $AC = 5$ и острым углом arctg 2,4. Найдите объем пирамиды.	1) 12; 2) 20; 3) 24; 4) 28; 5) 56.
57.	Основанием пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD = 30$, $DC = 18$). Все апофемы боковых граней пирамиды равны 15. Найдите объем пирамиды.	1) 1420; 2) 1250; 3) 1240; 4) 1380; 5) $720\sqrt{6}$.
58.	Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. В основании пирамиды лежит трапеция с острым углом 30° и высотой 3, одно из оснований которой в 2 раза больше другого. Найдите $\frac{V}{\sqrt{7}}$, где V — объем пирамиды.	1) 162; 2) 165; 3) 224; 4) 220; 5) 168.
59.	В правильной треугольной усеченной пирамиде со сторонами оснований 3 и 6 и боковым ребром $2\sqrt{3}$ проведено сечение через боковое ребро перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром стороне основания. Найдите площадь сечения.	1) $4{,}5\sqrt{3}$; 2) $8\sqrt{2}$; 3) 12; 4) $6{,}75\sqrt{3}$; 5) 9,8.
60.	Боковая грань правильной треугольной усеченной пирамиды наклонена к основанию под углом 45°, а апофема пирамиды равна 8. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если сторона ее верхнего основания в 2 раза меньше стороны нижнего основания.	1) $288\sqrt{6}$; 2) 496; 3) $192\sqrt{10}$; 4) $157\sqrt{15}$; 5) 528.
61.	Сторона верхнего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а в диагональное сечение пирамиды можно вписать окружность радиуса 3. Найдите объем пирамиды.	1) 162; 2) 165; 3) 124; 4) 120; 5) 133.
62.	Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды наклонено к ее основанию под углом 45°, расстояние между плоскостями оснований пирамиды равно 4, а сумма площадей оснований равна 116. Найдите отношение длин сторон оснований пирамиды.	1) 1 : 2; 2) 1 : 5; 3) 3 : 4; 4) 3 : 7; 5) 3 : 5.
63.	Длина окружности основания цилиндра равна 8π, а радиус окружности, описанной около осевого сечения цилиндра, равен 5. Найдите объем цилиндра.	1) 106π; 2) 84π; 3) 96π; 4) 102π; 5) 92π.
64.	Осевое сечение цилиндра — прямоугольник с диагональю 12 и углом 60° между диагоналями. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.	1) $36\sqrt{3}\pi$; 2) 54π; 3) $36\sqrt{2}\pi$; 4) 72π; 5) 62π.
65.	Отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади его основания равно $4\sqrt{3}$. Найти угол наклона диагонали осевого сечения к основанию цилиндра.	1) 60°; 2) 45°; 3) 30°; 4) 75°; 5) arctg2.
66.	Треугольник ABC со стороной $AB = 12$ и углом $\angle CAB = 30°$ вписан в основание цилиндра с радиусом 6 и высотой 3. Найдите угол между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания цилиндра, где CC_1 — образующая цилиндра.	1) 60°; 2) 45°; 3) 30°; 4) 75°; 5) arctg1,5.
67.	Цилиндр с высотой $\frac{8}{\pi}$ и диаметром основания $4\sqrt{2}$ переплавили в куб. Найдите площадь поверхности куба.	1) 64; 2) 96; 3) 124; 4) 120; 5) 104.
68.	Сечение цилиндра, параллельное его оси, имеет форму квадрата с диагональю $8\sqrt{2}$ и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.	1) 164; 2) 196; 3) 128; 4) 256; 5) 254.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
69.	Сечение цилиндра, параллельное его оси, имеет площадь $16\sqrt{3}$ и отсекает от окружности основания дугу в 120°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.	1) 64π; 2) 32π; 3) 16π; 4) 36π; 5) 24π.
70.	Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с катетом 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	1) $6\sqrt{3}\ \pi$; 2) 14π; 3) $8\sqrt{2}\ \pi$; 4) $6\sqrt{2}\ \pi$; 5) 12π.
71.	Отношение площади боковой поверхности к площади основания конуса равно $\sqrt{2.5}$, а высота конуса равна $2\sqrt{3}$. Найдите площадь осевого сечения конуса.	1) $6\sqrt{3}$; 2) 8; 3) $3\sqrt{6}$; 4) $4\sqrt{6}$; 5) 12.
72.	Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника с катетом $2\sqrt{6}$ и высотой, проведенной к гипотенузе, равной $0{,}4\sqrt{6}$, вокруг меньшего катета.	1) 6π; 2) 8π; 3) 5π; 4) 9π; 5) 12π.
73.	Параллельно основанию конуса проведено сечение, которое делит высоту конуса в отношении 1 : 3, считая от вершины. Найдите площадь сечения, если длина окружности основания конуса равна 16π.	1) 6π; 2) 8π; 3) 4π; 4) 9π; 5) 12π.
74.	Параллельно основанию конуса проведено сечение, площадь которого в 9 раз меньше площади основания конуса. Известно, что в основание конуса можно вписать правильный треугольник площадью $20{,}25\sqrt{3}$. Найдите площадь квадрата, вписанного в сечение конуса.	1) 6; 2) 8; 3) 12; 4) 10; 5) 14.
75.	Точка S — вершина конуса, а точки A и B лежат на окружности основания конуса. Хорда AB основания имеет градусную меру 120°. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если площадь треугольника ASB равна 72, а образующая конуса равна 12.	1) $60\sqrt{2}\ \pi$; 2) 98π; 3) $40\sqrt{6}\ \pi$; 4) 90π; 5) $48\sqrt{6}\ \pi$.
76.	Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 6, а образующая — 5. Найдите объем тела.	1) 60π; 2) 52π; 3) 48π; 4) 54π; 5) 56π.
77.	Осевым сечением усеченного конуса является трапеция, в которую можно вписать окружность радиуса $5\sqrt{3}$. Образующая усеченного конуса в 2 раза больше меньшего из оснований этой трапеции. Найдите площадь боковой поверхности тела.	1) 400π; 2) 382π; 3) 186π; 4) 190π; 5) 200π.
78.	Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с центральным углом 150° и радиусом 8. Найдите радиус конуса.	1) 4; 2) 2,6; 3) $\frac{10}{3}$; 4) $\frac{8}{3}$; 5) 3.
79.	Развертка боковой поверхности конуса имеет площадь 24π, а ее центральный угол равен 240°. Найдите $\frac{3}{\sqrt{5}}V$, где V — объем конуса.	1) 42π; 2) 36π; 3) 48π; 4) 32π; 5) 38π.
80.	Разверткой боковой поверхности усеченного конуса является часть кольца с длинами внутренней и внешней дуг 20π и 8π соответственно и центральным углом 60°. Найдите образующую данного усеченного конуса. 	1) 34; 2) 36; 3) 24; 4) 30; 5) 32.
81.	Площадь сечения шара плоскостью равна 144π, а площадь большого круга шара — 169π. Найдите расстояние от плоскости сечения до центра шара.	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
82.	Длина линии пересечения сферы и плоскости равна 12π, а расстояние от центра шара до секущей плоскости равно 8. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в большую окружность сферы.	1) $75\sqrt{3}$; 2) 104; 3) $36\sqrt{6}$; 4) $42\sqrt{6}$; 5) $64\sqrt{3}$.
83.	Шар с площадью поверхности 64π переплавили в цилиндр с радиусом основания 8. Найдите высоту цилиндра.	1) 1,3; 2) 2,6; 3) $\frac{8}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) 3.
84.	Через точку A, лежащую на поверхности шара, провели сечение шара плоскостью под углом 30° к радиусу шара AO. Найдите площадь сечения шара плоскостью, если радиус шара равен 10.	1) 60π; 2) 75π; 3) 68π; 4) 84π; 5) 76π.
85.	Вершины прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$, $AC = 9$, $\sin\angle ABC = 0{,}75$) лежат на поверхности сферы диаметром 20. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 10.

№ п/п	Задания	Варианты ответов
86.	Сфера касается всех сторон ромба, сторона которого равна одной из диагоналей и равна $4\sqrt{3}$. Плоскость ромба удалена от центра сферы на расстояние втрое меньшее диаметра сферы. Найдите это расстояние.	1) $1{,}5\sqrt{5}$; 2) 4; 3) $2\sqrt{6}$; 4) $1{,}2\sqrt{5}$; 5) $1{,}4\sqrt{5}$.
87.	Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 1 : 3 : 5, а радиус сферы, описанной около параллелепипеда, равен $\sqrt{35}$. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.	1) 234; 2) 136; 3) 224; 4) 230; 5) 184.
88.	Прямая призма, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 5 и основанием 6, вписана в сферу радиуса $\frac{5\sqrt{29}}{8}$. Найдите объем призмы.	1) 37; 2) 28; 3) 32; 4) 30; 5) 34.
89.	В правильную четырехугольную пирамиду с высотой 6 и плоским углом при вершине 60° вписана сфера. Найдите $(\sqrt{3}+1)R$, где R — радиус сферы.	1) 9; 2) 6; 3) 12; 4) 8; 5) 10.
90.	Около равностороннего конуса с площадью боковой поверхности 72 описана сфера. Найдите площадь поверхности сферы.	1) 196; 2) 168; 3) 192; 4) 184; 5) 180.
91.	В цилиндр с диагональю осевого сечения $18\sqrt{2}$ вписан шар. Найдите объем части цилиндра, находящейся вне шара.	1) 460π; 2) 475π; 3) 468π; 4) 484π; 5) 486π.
92.	В правильную треугольную пирамиду, боковая грань которой наклонена к основанию под углом 60°, вписан шар радиуса 2. Найдите объем пирамиды.	1) $72\sqrt{3}$; 2) $144\sqrt{3}$; 3) $36\sqrt{3}$; 4) $42\sqrt{3}$; 5) $64\sqrt{3}$.
93.	Сфера радиуса 8 проходит через вершины S и B правильной треугольной пирамиды $SABC$. Известно, что сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{3}$, а боковое ребро образует с высотой пирамиды угол 30°. В каком отношении точка пересечения сферы и апофемы грани ASC делит эту апофему?	1) 3 : 4; 2) 3 : 7; 3) 2 : 5; 4) 3 : 10; 5) 3 : 12.
94.	В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости грани ABC, $\angle BAC = 90°$, $AS = 2$, $AC = 3$, $BC = 3\sqrt{5}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.	1) 7; 2) 3,5; 3) 4; 4) 8; 5) 7,5.
95.	В цилиндр вписана призма, в основании которой лежит трапеция с взаимно перпендикулярными диагоналями и основаниями 2 и 8. Найдите объем цилиндра, если боковое ребро призмы равно 8.	1) 132π; 2) 136π; 3) 140π; 4) 164π; 5) 126π.
96.	В четырехугольную пирамиду с объемом 40 и высотой 15, основание которой — ромб с острым углом 30°, вписан конус. Найдите объем конуса.	1) 6π; 2) $5{,}2\pi$; 3) 8π; 4) 4π; 5) 5π.
97.	В конус с высотой 6 и радиусом основания $3\sqrt{2}$ помещен куб так, что одна его грань лежит в основании конуса, а все вершины противоположной грани лежат на боковой поверхности конуса. Найдите объем куба.	1) 9; 2) 3; 3) 27; 4) $3\sqrt{3}$; 5) $9\sqrt{3}$.
98.	В конус объемом 96π и углом при вершине осевого сечения, равным $\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$, вписан шар. Найдите длину линии пересечения поверхности шара с боковой поверхностью конуса.	1) $3{,}6\pi$; 2) 5π; 3) $3{,}2\pi$; 4) $4{,}8\pi$; 5) $1{,}6\pi$.

Тест 1

Часть А

А1. Простым является число:	1) 6; 2) 15; 3) 29; 4) 33; 5) 45.
А2. Периметр правильного треугольника равен 12. Найдите площадь круга, вписанного в данный треугольник.	1) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$; 2) $\frac{4}{3}\pi$; 3) π; 4) 2π; 5) $1{,}5\pi$.
А3. Сечение сферы плоскостью имеет длину 6π и удалено от центра сферы на 4. Найдите диаметр сферы.	1) 8; 2) 5; 3) 9; 4) 13; 5) 10.
А4. На рисунке изображен график функции, заданной на отрезке $[-6; 5]$.  Найдите сумму длин промежутков убывания функции.	1) 11; 2) 9; 3) 7; 4) 4; 5) 2.
А5. Вычислите $\frac{1{,}3^2+2{,}6\cdot2{,}7+2{,}7^2}{\frac{3}{5}\cdot0{,}8-\frac{2}{7}:\frac{5}{3}+0{,}6\cdot19\frac{17}{35}}\cdot\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1}$.	1) 0,4; 2) 0,5; 3) 10; 4) 1,3; 5) 0,1.
А6. Найдите значение выражения $\frac{a^5b^3-4a^3b}{a^4b-2a^4}$ при $a=\sqrt[3]{32}$, $b=\sqrt[3]{2}$.	1) 2; 2) $6\sqrt[3]{2}$; 3) $\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt[3]{16}$; 5) $\sqrt[3]{32}$.
А7. Укажите количество целых значений аргумента, принадлежащих области определения функции $y=\frac{\sqrt{24-2x}}{\log_2 x-3}$.	1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 10; 5) 9.
А8. Планку распилили в отношении 2 : 1 : 4. Если от большей из полученных частей отпилить кусок длиной 8 см, то ее длина будет равна длине средней из полученных частей. Найдите длину планки до распиливания в сантиметрах.	1) 24; 2) 38; 3) 16; 4) 20; 5) 28.
А9. Решить уравнение $(x^3-4x)(5-x)=(x^2-3x-10)(x^2+3x-1)$. В ответе указать произведение большего корня уравнения на количество корней.	1) 25; 2) –6; 3) 2; 4) 12; 5) 20.
А10. Найдите большую диагональ параллелограмма со сторонами 3 и 6 и площадью $9\sqrt{3}$.	1) 5; 2) 12; 3) $3\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{7}$; 5) 9.
А11. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если $BC = 4$, $AD = 9$, а площадь треугольника BOC равна 32.	1) 318; 2) 325; 3) 394; 4) 338; 5) 410.
А12. В арифметической прогрессии, первый член которой отрицательный, сумма 2-го и 6-го членов равна 14, а произведение 3-го и 8-го членов равно 76. Найдите 10-й член прогрессии.	1) 25; 2) 16; 3) 22; 4) 32; 5) 20.

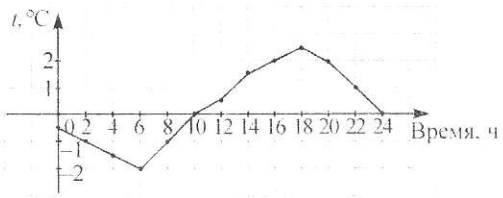
A13. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{(4-2x)(x+1)}{(x^2+3x-10)(x-3)^2}\geq 0$.	1) –13; 2) –12; 3) –14; 4) –9; 5) –10.
A14. Вычислите $\log_3 27\sqrt{3}-3^{\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}}$.	1) 1,5; 2) 3; 3) 4,5; 4) 5; 5) 6.
A15. Упростите выражение $(\sin^2 31^\circ+\sin^2 59^\circ+\operatorname{tg}^2 3\alpha)\cdot 4\sin^2\frac{3\alpha}{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}$ и найдите его значение при $\alpha=\frac{\pi}{18}$.	1) 9; 2) 3; 3) 1; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\frac{1}{3}$.
A16. Два приятеля отправились на велосипедах из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 24 км. Первый выехал на 15 минут раньше второго, а второй догнал его в 12 км от пункта B. Найдите скорость 1-го велосипедиста (в км/ч), если известно, что она на 4 км/ч меньше скорости второго.	1) 8; 2) 10; 3) 12; 4) 15; 5) 16.
A17. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к основанию под углом 60°. Найдите синус угла наклона диагонали параллелепипеда к плоскости боковой грани.	1) 0,5; 2) 0,2; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{1}{3}$.
A18. Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения $(\sqrt{2})^{2x}-4=2^{5-x}$.	1) –6; 2) 3; 3) –2; 4) 4; 5) 2.

Часть B

B1. Найдите сумму целых решений неравенства $\log_{\cos\frac{5\pi}{12}}(x^2-4x+4)\geq 0$.
B2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $\angle ABC=106^\circ$, $\angle BDC=50^\circ$. Найдите величину угла BCA в градусах.
B3. Найдите в градусах сумму корней уравнения $\sin x-2\cos^2 x=\sin 3x-1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.
B4. Найдите значение выражения $\frac{b^{\frac{5}{4}}-b^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}-1}:\left(b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)+2b^{\frac{1}{4}}+1$ при $b=256$.
B5. Треугольная пирамида со сторонами основания 5, 9 и 12, боковые грани которой наклонены к основанию под углом 45°, описана около конуса. Найдите значение величины $\frac{13\sqrt{2}S_{бок}}{\pi}$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности конуса.
B6. Найдите наименьшее значение функции $2\sqrt{3}\sin 6x-2\cos 6x-3$.
B7. Найдите сумму целых корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{\left\|5x-7-2x^2\right\|+\left\|x-7\right\|-2x^2+6x-14}{\sqrt{19x-x^2+42}}=0$.
B8. Если разделить некоторое двузначное число на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 2. Если разделить это число на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 38. Найдите данное число.
B9. Найдите произведение корней уравнения $x^2-4-\sqrt[4]{x^3(x+6)^3}+6x=2\sqrt[4]{x^2+6x}$.
B10. Решите систему $\begin{cases}\log_2 y=x,\\ y^2-16+4^{3-x}\leq 0.\end{cases}$ В ответе укажите значение выражения $\sqrt{2}x_0y_0$, где $(x_0;\,y_0)$ — решение системы.
B11. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\left(5^{x-2}+\frac{25}{5^x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(2x+48)}>1$.
B12. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция с основаниями $BC=4$ и $AD=8$. Высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а все боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C перпендикулярно ребру AD.

Тест 2

Часть А

А1. Укажите верное равенство: 1) $a^b + a^c = a^{b+c}$; 2) $(a^b)^c = a^{b+c}$; 3) $\frac{a^b}{a} = a^{\frac{b}{a}}$; 4) $a^b \cdot a^c = a^{b \cdot c}$; 5) $a^b - a^c = a^{b-c}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
А2. Если диаметр окружности равен 24, то длина дуги этой окружности с центральным углом 150° равна:	1) 12; 2) 10; 3) 10π; 4) 12π; 5) 15π.
А3. На графике изображено изменение температуры воздуха в городе в течение суток (измерения проводились каждые два часа).  Какой была температура воздуха в 16 ч?	1) 2 °C; 2) 1,5 °C; 3) 1 °C; 4) 16 °C; 5) 0 °C.
А4. Найдите значение выражения $5{,}2 \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cdot (-5{,}2) + 1{,}375 \cdot 5\frac{1}{5}$.	1) 1,4; 2) 5,2; 3) 7,8; 4) 2,6; 5) 10,4.
А5. Сократите дробь $\frac{a^2 + 9 - 6a}{a^2 + ab - 3a - 3b}$.	1) $\frac{a-3}{a-b}$; 2) $\frac{a-9}{a-b}$; 3) $3-a$; 4) $\frac{a-3}{ab}$; 5) $\frac{a-3}{a+b}$.
А6. Площадь треугольника ABC со стороной $BC = 8$ равна 40. Из точки M, принадлежащей стороне AB так, что $AM : MB = 7 : 3$, проведен перпендикуляр MH к стороне BC. Найдите длину отрезка MH.	1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) $4\frac{2}{7}$; 5) 6.
А7. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник с катетом $6\sqrt{2}$. Найдите объем конуса.	1) 72π; 2) 216π; 3) $36\sqrt{2}\,\pi$; 4) 36π; 5) $72\sqrt{2}\,\pi$.
А8. Найдите значение выражения $5^{\frac{\log_3 15}{\log_3 25}} - \log_3 12 + \log_3 36$.	1) 14; 2) 15; 3) 16; 4) 17; 5) $12 - 2\log_3 4$.
А9. Результатом упрощения выражения $\frac{\sqrt[4]{(3-\sqrt{13})^4}}{3-\sqrt{13}} - \frac{2\sqrt[3]{(8-6\sqrt{2})^3}}{6\sqrt{2}-8}$ является:	1) –1; 2) 3; 3) –3; 4) 2; 5) 1.
А10. Вычислите $\sin^2 585° + \operatorname{tg}\frac{19\pi}{4}$.	1) 1,5; 2) –0,5; 3) –0,75; 4) 1,25; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.
А11. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{9x}{x^2-9} - \frac{8x}{x^2+2x-3} + \frac{x-12}{x^2-4x+3} = 0$.	1) –3; 2) 3; 3) –6; 4) 6; 5) 1.
А12. Найдите сумму целых значений аргумента, принадлежащих области определения функции $y = \sqrt{\frac{31-11x}{6-x-x^2}-1}$.	1) –2; 2) 3; 3) –3; 4) –1; 5) 1.
А13. После выпаривания из 12 %-ного раствора соли 10 г воды концентрация соли в растворе оказалась равной 20 %. Найдите массу раствора соли до выпаривания.	1) 60; 2) 50; 3) 40; 4) 25; 5) 20.
А14. Сумма 3-го и 6-го членов геометрической прогрессии равна –4, а разность 9-го и 3-го членов равна 36. Найдите первый член прогрессии.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{7}$; 5) 2.

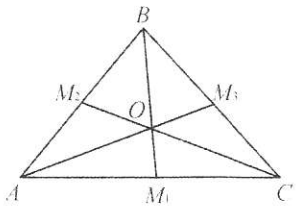
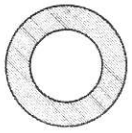
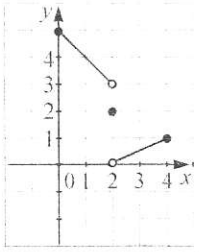
A15. Найти период функции $y = 5 + 7\sin 12x$.	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{\pi}{18}$; 5) $\frac{\pi}{12}$.
A16. Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью боковой грани угол 60°. Площадь боковой поверхности пирамиды равна $32\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.	1) 64; 2) 96; 3) 48; 4) 36; 5) 32.
A17. Большая диагональ ромба относится к его высоте как $\sqrt{10}$: 1. Площадь ромба равна 600. Найдите длину стороны ромба.	1) 24; 2) 20; 3) $10\sqrt{10}$; 4) $6\sqrt{10}$; 5) 12.
A18. Найдите в градусах сумму корней уравнения $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ на отрезке $[2\pi; 3\pi]$.	1) 540; 2) 860; 3) 930; 4)1280; 5) 1350.

Часть B

B1. Найдите сумму квадратов корней уравнения $2^{x^2-4} - 3^{x^2-5} = 3^{x^2-6} - 2^{x^2-5}$.
B2. Вычислите $4\sqrt{5}\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.
B3. Длина линии пересечения сферы и плоскости равна $4\sqrt{\pi}$. Расстояние от центра сферы до данной плоскости равно $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Найдите площадь поверхности сферы.
B4. Расстояние от вершины параболы $y = x^2 + 14x + 73$ до начала координат равно...
B5. Найдите сумму целых отрицательных решений неравенства $3^{\frac{x^2-2x}{x+6}} + 3^{\frac{x^2-x+6}{x-6}} \geq 4$.
B6. Найдите сумму целых чисел, не являющихся решениями неравенства $\left\|3x-11\right\|-15\right\| > 5$.
B7. Некоторое количество деталей было разложено по 4 ящикам. Затем из первого ящика переложили во второй четверть деталей, находящихся в первом ящике. После этого из второго ящика переложили четверть оказавшихся там деталей в третий ящик. Наконец, из четвертого ящика переложили четверть оказавшихся там деталей в первый ящик. После этого в каждом из ящиков оказалось по 27 деталей. Сколько деталей было во втором ящике первоначально?
B8. Найдите удвоенное произведение корней (или удвоенный корень, если он один) уравнения $\log_1(2x^2 - x)\cdot\log_1(x^2 - 2) = \frac{\lg(2x^2 - x)}{\lg(x^2 - 2)}$.
B9. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{\frac{x+5}{6-x}}\left(\log_{\frac{1}{3}}(13-2x) + \log_3(x^2 - 10x + 25)\right) \geq 0$.
B10. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с радиусом 8 и центральным углом 270°. Найдите значение выражения $\frac{V}{\sqrt{7}\pi}$, где V — объем конуса.
B11. В трапеции длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 8. Если диагонали трапеции равны 30 и 34, то ее площадь равна...
B12. Для каждой пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $y^2 - 2xy - 2x = 6$, вычислите сумму $x + y$. В ответ запишите наименьшую из этих сумм.

Тест 3

Часть А

А1. O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Выберите верное утверждение: а) $AO : OM_3 = 3 : 1$; б) $AO : OM_3 = 3 : 2$; в) $AO : AM_3 = 2 : 1$; г) $AO : AM_3 = 2 : 3$; д) $AO : AM_3 = 3 : 4$. 	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
А2. Две концентрические окружности (т. е. окружности с общим центром) ограничивают кольцо. Найдите площадь данного кольца, если радиусы окружностей равны 4 и 6. 	1) 4π; 2) 20π; 3) 26π; 4) 24π; 5) 18π.
А3. Функция задана графиком. Укажите область значений функции. 	1) $(0; 1]\cup\{2\}\cup(3; 5]$; 2) $[0; 1]\cup[3; 5]$; 3) $(0; 5]$; 4) $[0; 2)\cup(2; 4]$; 5) $[0; 4]$.
А4. Найдите x из пропорции: $\dfrac{10\frac{3}{5}+1{,}8}{x}=\dfrac{0{,}31}{0{,}02:1{,}2}$.	1) 1,5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{20}{31}$; 4) $\frac{1}{60}$; 5) 15.
А5. Вычислить $\log_3\left(\log_2^2\left(\frac{1}{2}\right)+6\log_2\sqrt{2}+5\right)$.	1) 3; 2) –1; 3) 2; 4) 4; 5) 0,5.
А6. Сократите дробь $\dfrac{2-5p-2k+5pk}{10p^2-9p+2}$.	1) $\frac{k-1}{p-0{,}5}$; 2) $\frac{k+1}{2p+1}$; 3) $\frac{k+1}{2p-1}$; 4) $\frac{k-1}{2p+1}$; 5) $\frac{k-1}{2p-1}$.
А7. В окружность радиуса $2\sqrt{6}$ вписан равносторонний треугольник. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит высоту, проведенную к этой стороне, в отношении 3 : 1, считая от основания. Длина отрезка этой прямой, заключенной между сторонами треугольника, равна:	1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 5) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.
А8. Результат упрощения выражения $\dfrac{1-\cos 4x}{\cos^{-2}2x-1}+\dfrac{1+\cos 4x}{\sin^{-2}2x-1}$ равен:	1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) –1; 5) 0.
А9. Наименьшее целое число из области определения функции $y=\sqrt{\dfrac{4+x^2}{16-x^2}}$ равно:	1) –5; 2) –4; 3) –3; 4) 4; 5) 3.
А10. Найдите значение выражения $\left(\sqrt[8]{a^2+27-6\sqrt{3}a}+4\sqrt[4]{3\sqrt{3}-a}\right)\cdot\sqrt[4]{3\sqrt{3}+a}$ при $a=\sqrt{11}$.	1) 10; 2) –10; 3) 5; 4) 4; 5) $3\sqrt{3}$.
А11. Отрезок AN является медианой треугольника ABC, где $B(5; 2)$ и $N(9; 5)$. Найдите длину стороны BC треугольника.	1) 10; 2) 9; 3) 8; 4) 6; 5) 5.
А12. Сумма корней (или корень, если он один) уравнения $4^x - 3\cdot 2^{x+1} - 16 = 0$ равна:	1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3; 5) 4.
А13. Найти сумму целых решений системы неравенств $\begin{cases} x^2>1, \\ -2\le\dfrac{2x+1}{3}\le 0. \end{cases}$	1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) –5; 5) 4.

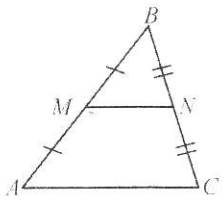
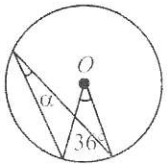
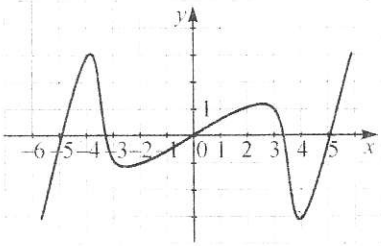
A14. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона равна 60. Если центр вписанной окружности делит высоту BD в отношении 12 : 5, то основание треугольника равно:	1) 50; 2) 40; 3) 30; 4) 25; 5) 20.
A15. Найти середину отрезка, который образуют решения неравенства $\lvert 2x-1\rvert \le \lvert x+3\rvert$.	1) 1; 2) $\frac{10}{3}$; 3) $\frac{5}{3}$; 4) 3; 5) 0.
A16. Сумма корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{x^2+6x+8}{4+x}=x^2-3x-3$ равна:	1) 7; 2) 4; 3) –5; 4) 14; 5) –6.
A17. Осевым сечением конуса является треугольник со сторонами 12 и 48. Найдите объем конуса.	1) 931π; 2) 1029π; 3) $864\sqrt{2}\ \pi$; 4) 570π; 5) $216\sqrt{7}\ \pi$.
A18. Среднее арифметическое корней уравнения $2\sin x\cos x+\sin^4 x-\cos^4 x=0$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ равно:	1) $-\frac{3\pi}{8}$; 2) 0; 3) $\frac{5\pi}{8}$; 4) $-\frac{\pi}{8}$; 5) $\frac{3\pi}{8}$.

Часть B

B1. Найдите сумму корней уравнения $x^2+\sqrt{(x+3)^2}=9$.
B2. Вычислите $3\sqrt{3}\cos\left(\arccos 0+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
B3. Разность между наибольшим и наименьшим решениями неравенства $4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4\ge 0$ равна...
B4. Седьмой член геометрической прогрессии равен 2, тогда произведение первых ее тринадцати членов равно...
B5. Через точку, не лежащую на сфере, проведены две плоскости, касающиеся сферы. Угол между плоскостями — 60°, площадь сферы — 32π. Значение выражения $d\sqrt{2}$, где d — расстояние от центра сферы до линии пересечения плоскостей, равно...
B6. Найдите наименьший положительный период функции $y=13-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi x}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi x}{5}\right)$.
B7. Продолжение общей хорды AB двух окружностей пересекает их общую касательную MN точке K. Если $KA = 3$, $AB = 9$, то расстояние MN между точками касания равно...
B8. Для каждой пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе: $\begin{cases} x-xy+y=1, \\ x^2+y^2+2x+2y=11 \end{cases}$, найдите значение суммы (x^2+y^2). В ответ запишите значение выражения $m\cdot n$, где m — наименьшая из полученных сумм, а n — количество решений системы.
B9. Расстояние от центра основания правильной треугольной пирамиды до ее боковой грани равно 2. Двугранный угол при основании равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
B10. Найти произведение корней уравнения $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x)+\log_2\frac{x^2}{8}+7=0$. В ответ записать число, обратное данному.
B11. Заказ по изготовлению деталей должен был быть выполнен по графику за 25 часов. После выполнения $\frac{1}{5}$ части заказа количество рабочих было увеличено на 6 человек, в результате чего весь заказ был выполнен за 21 ч. Известно, что один рабочий изготавливает 8 деталей в час. Найдите значение выражения $S+p$, где S — количество деталей в заказе, а p — первоначальное количество рабочих.
B12. Найдите наименьшее m и наибольшее M значения выражения x^2+y^2, если $x^2-4xy+7y^2=1$. В ответ запишите значение выражения $3(m+M)$.

Тест 4

Часть А

А1. На рисунке изображен треугольник ABC, в котором $AM = MB$, $CN = NB$. Выберите верные утверждения: а) $MN = AC$; б) $MN \parallel AC$; в) $MN \perp AC$; г) $MN = \frac{1}{2}AC$; д) $MN = \frac{1}{3}AC$. 	1) а, б; 2) в, г; 3) б, д; 4) б, г; 5) в, г.
А2. Используя данные рисунка, найдите градусную меру угла α. Точка O — центр окружности. 	1) 18; 2) 36; 3) 45; 4) 27; 5) 20.
А3. Найдите значение выражения $\frac{2}{7}:\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{9}-\frac{5}{9}$.	1) 0; 2) $-\frac{65}{147}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) 1.
А4. Функция $f(x)$ задана графиком на отрезке $[-6; 6]$.  Выберите верные утверждения: а) $f(x)$ — четная функция; б) $f(x)$ — нечетная функция; в) функция $f(x)$ имеет ровно 4 нуля; г) функция $f(x)$ принимает только положительные значения на отрезке $[-2; 2]$; д) функция убывает на промежутке $(-4; -3)$.	1) а, г; 2) в, г; 3) б, д; 4) б, г; 5) в, д.
А5. Найдите значение выражения $\frac{9a^2+25b^2-30ab}{25b^2-9a^2}$ при $a=\frac{5}{7}$, $b=\frac{4}{7}$.	1) 0; 2) $-\frac{25}{7}$; 3) $-\frac{1}{7}$; 4) $\frac{1}{7}$; 5) 1.
А6. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если $A(-2; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(6; 2)$.	1) 24; 2) 12; 3) 13; 4) 10; 5) 14.
А7. Значение выражения $\frac{\lg 900}{\lg 3}-2\log_3 10$ равно:	1) 4; 2) 2; 3) 100; 4) 1; 5) 280.
А8. Найдите сумму целых решений неравенства $1{,}5+0{,}2x-0{,}1x^2 \geq 0$.	1) –9; 2) 11; 3) –11; 4) 10; 5) 9.
А9. Основание равнобедренного треугольника равно 16, а высота, проведенная к основанию, равна 15. Найдите высоту треугольника, проведенную к боковой стороне.	1) 17; 2) $\frac{240}{17}$; 3) $\frac{225}{17}$; 4) $\frac{256}{17}$; 5) $16\sqrt{15}$.
А10. Разверткой боковой поверхности цилиндра с высотой 8 является прямоугольник с диагональю 10. Найдите объем цилиндра.	1) $\frac{72}{\pi}$; 2) 36π; 3) 72π; 4) $\frac{36}{\pi}$; 5) 144π.
А11. Найдите длину промежутка, являющегося решением системы неравенств $\begin{cases} x^2 > -8x, \\ 37 < 4(2-x) < 57. \end{cases}$	1) $1\frac{1}{4}$; 2) $20\frac{1}{4}$; 3) $4\frac{1}{4}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) нет решений.

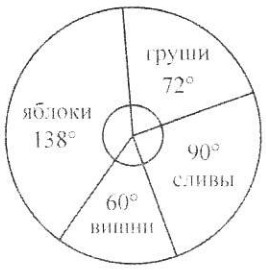
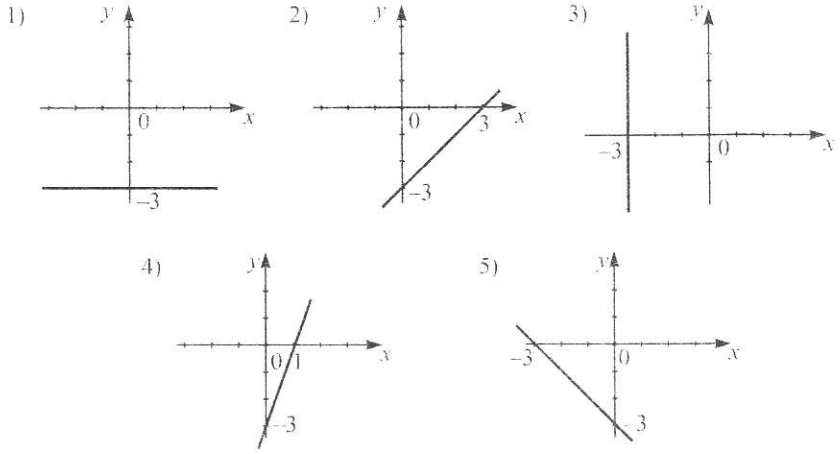
A12. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[5]{(5\sqrt{2}+7)^4}}{\sqrt[5]{7-5\sqrt{2}}}+8$.	1) $15+5\sqrt{2}$; 2) 15; 3) –15; 4) $1-5\sqrt{2}$; 5) 8.
A13. Третий член геометрической прогрессии равен 2, а шестой ее член равен 54. Найдите сумму первых четырех членов прогрессии.	1) 27; 2) $8\frac{8}{9}$; 3) $7\frac{1}{3}$; 4) $8\frac{2}{9}$; 5) 9.
A14. $f(x)$ — нечетная, периодическая функция с периодом $T=8$, заданная при $x\in[0;4]$ формулой $f(x)=4x-x^2$. Найдите $f(-18)$.	1) 0; 2) –2; 3) 2; 4) –4; 5) 4.
A15. Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\left\|x^2-x-4\right\|=x-2$.	1) $\sqrt{6}+3\sqrt{2}$; 2) 12; 3) –12; 4) –2; 5) –6.
A16. Задумано целое положительное число. К его записи приписали справа цифру 8 и полученное число уменьшили на 25 %. В результате получили 126. Найдите задуманное число.	1) 14; 2) 16; 3) 10; 4) 18; 5) 20.
A17. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{3^{x+1}+1}{9^x-4\cdot3^x+3}-\frac{3^x+27}{9^x-9}-\frac{1}{3^x+3}=0$.	1) 9; 2) 0; 3) 1; 4) –2; 5) 2.
A18. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=18$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.	1) 3; 2) –3; 3) 1; 4) –4; 5) 4.

Часть B

B1. Найдите в градусах значение выражения $\arccos\left(\cos\frac{35\pi}{9}\right)$.
B2. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства $\left\|2x^2-9x+15\right\|\geq20$.
B3. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 3 и 5 и углом 120° между ними. Диагональ большей боковой грани призмы наклонена к основанию под углом 30°. Найдите значение выражения $4V$, где V — объем призмы.
B4. Найдите в градусах сумму корней уравнения $\sin2x+\sin6x=2\sin^2x-2\cos^2x$, принадлежащих отрезку $[0;\pi]$.
B5. Найдите сумму целых решений неравенства $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{7}{x-1}}-25\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{8}{x-1}}-54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x-1}}\geq0$.
B6. Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону длиной 25 в отношении 49 : 24, считая от большего основания. Если меньшее основание равно 1, то площадь трапеции равна…
B7. Найдите увеличенную в 24 раза сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_{2-3x}(6x^2-7x+2)-\log_{1-2x}(9x^2-12x+4)=2$.
B8. Радиусы шаров равны 8 и 10. Если расстояние между их центрами равно 12, то значение выражения $\frac{\sqrt{7}l}{\pi}$, где l — длина линии, по которой пересекаются их поверхности, равно…
B9. Найдите наибольшее значение функции $y=6\sin3x\cos3x-5\cos^23x-13\sin^23x$.
B10. Из города A в город B со скоростью 18 км/ч выехал велосипедист. Через 20 минут в том же направлении выехал мотоциклист со скоростью 30 км/ч. Мотоциклист доехал до В, повернул обратно и встретил велосипедиста через 30 минут после того, как он обогнал велосипедиста. Чему равно расстояние от А до В в километрах?
B11. Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^2-8x+12}+4x-x\sqrt{2-x}=4\sqrt{6-x}$.
B12. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{2x-13}{x-6}>\left\|\log_2x\right\|$.

Тест 5

Часть А

А1. Если a и b — натуральные числа такие, что $\frac{a}{b}=7$, то верным является утверждение: а) b — делитель числа 7; б) $b=7a$; в) a — делитель числа 7; г) числа a и b разной четности; д) a кратно семи.	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
А2. Сторона ромба равна одной из его диагоналей. Высота ромба равна $3\sqrt{3}$. Найдите длину стороны ромба.	1) 6; 2) $3\sqrt{6}$; 3) 4; 4) 12; 5) $6\sqrt{3}$.
А3. В магазин привезли фрукты и ягоды. На рисунке изображена круговая диаграмма распределения количества привезенных плодов. Известно, что слив привезли 600 кг. Тогда масса (в кг) груш равна: 	1) 400; 2) 480; 3) 560; 4) 920; 5) 540.
А4. Укажите рисунок, на котором изображен график линейной функции с угловым коэффициентом $k=3$ и проходящей через точку $(0;-3)$. 	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.
А5. Найдите значение выражения $5{,}125:4{,}1:\frac{1}{12}-1\frac{7}{9}\cdot 2{,}25$.	1) 12; 2) $10\frac{1}{9}$; 3) 9,4; 4) 11; 5) 10,25.
А6. Упростите выражение $\frac{a^{4,4}-a^{1,4}}{a^{3,4}+a^{1,4}}$ и найдите его значение при $a=3\sqrt{5}$.	1) 22; 2) $\frac{23}{45}$; 3) 44; 4) 45; 5) 15.
А7. Значение выражения $8^{\frac{\log_{12}3}{1-\log_{12}6}}$ равно:	1) 16; 2) 24; 3) 8; 4) $16\sqrt{2}$; 5) 27.
А8. Результатом упрощения выражения $\frac{\operatorname{tg}4\alpha+\sin 4\alpha}{2\operatorname{tg}4\alpha}$ является:	1) $\cos^2 2\alpha$; 2) 1; 3) $\sin^2 2\alpha$; 4) 0; 5) $\operatorname{tg}2\alpha$.
А9. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $6\sqrt{2}$. Найдите объем цилиндра.	1) 486π; 2) 64π; 3) 54π; 4) 27π; 5) 108π.
А10. Один из катетов прямоугольного треугольника равен $2\sqrt{2}$, а проекция другого катета на гипотенузу — $4\frac{2}{3}$. Найдите длину гипотенузы треугольника.	1) $6\frac{1}{3}$; 2) 6; 3) $3\sqrt{2}$; 4) 5,6; 5) $2\sqrt{5}$.
А11. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{x^2+4x-8}{x^2-8x+15}=\frac{5-6x}{(5-x)(x-3)}$.	1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) 1; 5) −1.

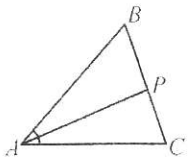
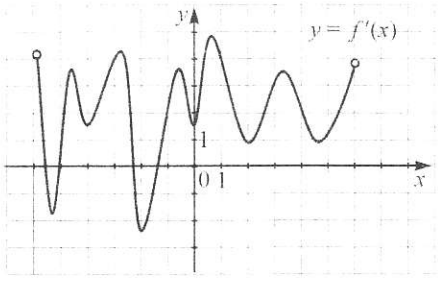
A12. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\frac{77^2-56^2}{133\cdot 7}-11}-\frac{3}{\sqrt{7}-2}+\frac{2}{3-\sqrt{7}}$.	1) –2; 2) –1; 3) 2; 4) 1; 5) $\sqrt{7}-1$.
A13. Касательная, проведенная к графику функции $y=x^2-4x+3$, параллельна прямой $y=2x+1$. Найдите ординату точки касания.	1) 0; 2) 2; 3) 3; 4) 1; 5) –1.
A14. Найдите количество целых значений x, при которых выражение $\frac{(4-x)(x^2+6x+9)}{x}$ принимает неотрицательные значения.	1) 4; 2) 5; 3) 3; 4) 7; 5) 6.
A15. Между числами –4 и 26 вставили 9 чисел, образующих вместе с ними арифметическую прогрессию. Найдите сумму первых шести членов данной прогрессии.	1) 10; 2) 35; 3) 21; 4) 31; 5) 26.
A16. Найдите сумму целых значений аргумента, принадлежащих области определения функции $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{4^{x+1}-9\cdot 2^x+2}$.	1) –1; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) –2.
A17. Найдите количество целых решений неравенства $\left\lvert\frac{x-2}{2x+4}\right\rvert>1$.	1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 6; 5) 1.
A18. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\frac{\cos x}{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=0$, принадлежащих отрезку $[-\pi;4\pi]$.	1) 540°; 2) 360°; 3) 270°; 4) 240°; 5) 210°.

Часть B

B1. Найдите произведение корней уравнения $\lvert x+5\rvert(x-7)=3x-21$.
B2. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 4, а угол между боковой стороной и большим основанием — 60°. Найдите значение выражения $\frac{S}{\sqrt{3}}$, где S — площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.
B3. Найдите значение выражения $2\sqrt{10}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3\right)\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3\right)$.
B4. Найдите значение суммы $1+\frac{7}{8}+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^3+\left(\frac{7}{8}\right)^4+\ldots$.
B5. Числитель правильной несократимой дроби на 7 меньше знаменателя. Если к числителю и знаменателю дроби прибавить число 3, а затем дробь, обратную полученной, умножить на $\frac{2}{9}$, то в результате получится исходная дробь. Найдите сумму числителя и знаменателя исходной дроби.
B6. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 3 и 6, а боковое ребро образует с основанием угол 30°. Найдите значение выражения $\frac{4}{\sqrt{7}}S_{бок}$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности пирамиды.
B7. Точки $A(5;3)$, $B(7;1)$ и $C(9;-2)$ — вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите сумму квадратов диагоналей параллелограмма.
B8. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $3x^2+x+2x\sqrt{2x^2+x-6}=6$.
B9. Найдите сумму целых решений неравенства $\log_{5-\sqrt{17}}(x^3-6x+9)-\frac{1}{\log_{16}(42-10\sqrt{17})}\geq 0$.
B10. Найдите наименьшее значение $x+y$, где $(x;y)$ — решение системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{5x^2-y^2}=x^2+2y,\\ 2x^2=3xy-y^2.\end{cases}$
B11. Найдите сумму всех решений неравенства $2\cos^2\frac{3\pi x}{2}+\sin^2\frac{3\pi x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}\leq 2^{\lvert\cos 3\pi x\rvert}$, принадлежащих отрезку $[-1;5]$.
B12. Разверткой боковой поверхности конуса является полукруг. Конус вписан в сферу радиуса $2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Тест 6

Часть А

А1. На рисунке изображен треугольник ABC ($AB \neq AC$), в котором $\angle BAP = \angle CAP$. Тогда для треугольника ABC отрезок AP является: 	1) биссектрисой; 2) высотой; 3) средней линией; 4) медианой; 5) стороной треугольника.
А2. Вычислить $\left(1+2:\frac{6}{7}\right)+\frac{5}{3}\cdot 7$.	1) 35; 2) 23; 3) 24; 4) 18; 5) 15.
А3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена в точке:	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $-\pi$; 4) 0; 5) $\frac{3\pi}{2}$.
А4. Найдите значение выражения $\frac{a^{18}-a^{15}}{a^{7}-a^{10}}$ при $a=\sqrt[8]{5}$.	1) 5; 2) 25; 3) 10; 4) –5; 5) –25.
А5. В первой четверти школьный факультатив по математике посещало 10 человек, 40 % из числа которых составляли девочки. Во второй четверти к ним добавилось еще 6 мальчиков. Какой процент составляет количество девочек, посещающих факультатив во второй четверти?	1) 35; 2) 25; 3) 20; 4) 15; 5) 10.
А6. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна 8, а один из отрезков, на которые она делит гипотенузу, имеет длину 16. Найдите площадь треугольника.	1) 180; 2) 160; 3) 80; 4) 60; 5) 90.
А7. Вычислить $\frac{\log_3 125-\log_3 5}{2\log_9 1,(6)+1}$.	1) 5; 2) 0,5; 3) 2; 4) 1; 5) 3.
А8. Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{17}{13}$.	1) $\frac{18}{13}$; 2) $\frac{120}{169}$; 3) $\frac{130}{169}$; 4) $\frac{12}{13}$; 5) 1.
А9. Найдите сумму всех натуральных значений n, удовлетворяющих условию $НОК(n; 18) = 18$.	1) 39; 2) 38; 3) 1; 4) 18; 5) 21.
А10. Пирамиду с высотой 18, в основании которой лежит прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой 6, переплавили в куб. Найдите длину ребра куба.	1) 3; 2) 4; 3) $3\sqrt[3]{4}$; 4) $2\sqrt{3}$; 5) $3\sqrt[3]{2}$.
А11. Результатом упрощения выражения $\sqrt{4\cos^2\alpha+4\cos\alpha+1}+2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}$ при $\alpha\in(\frac{8\pi}{3};\ 3\pi)$ является:	1) 1; 2) $4\cos\alpha + 1$; 3) $-4\cos\alpha + 1$; 4) –1; 5) $-4\cos\alpha - 1$.
А12. Найдите сумму всех натуральных значений x, при которых выражение $\frac{x}{12}+\frac{5x}{6}-3\left(\frac{x}{4}-1\right)$ принимает значения меньше 4.	1) 3; 2) 5; 3) 6; 4) 15; 5) 21.
А13. Найдите произведение корней уравнения $x^4-144+7x(x^2-12)=0$.	1) 144; 2) –144; 3) 12; 4) –12; 5) $-\sqrt{12}$.
А14. На рисунке изображен фрагмент графика некоторой периодической функции. Укажите число, которое является периодом данной функции. 	1) 27; 2) 25; 3) 16; 4) 15; 5) 11.

A15. Треугольник ABC со сторонами 18; $6\sqrt{3}$ и $12\sqrt{3}$ вписан в окружность с центром в точке O. Найдите величину угла BOC.	1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 120°.
A16. Решите неравенство $\frac{2}{x^2-4} \le \frac{1}{x^2+3x-10}$. В ответе укажите произведение наименьшего решения на количество целых решений.	1) –5; 2) 5; 3) –24; 4) –35; 5) –48.
A17. Найдите произведение корней уравнения $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x = 6$.	1) –1; 2) 1; 3) –4; 4) –2; 5) –8.
A18. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 8 и острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 4. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противолежащую сторону другого основания.	1) $32\sqrt{3}$; 2) $64\sqrt{3}$; 3) 64; 4) 32; 5) $32\sqrt{5}$.

Часть B

B1. Найдите сумму целых корней уравнения $\sqrt{x^2-14x+49} + \sqrt{x^2+6x+9} = 10$.

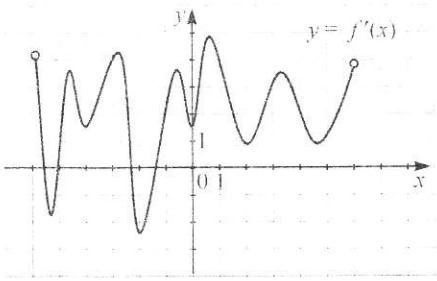
B2. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к основанию под углом $\alpha = \arcsin 0{,}6$, а площадь боковой поверхности цилиндра равна 48π. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

B3. Найдите в градусах среднее арифметическое корней уравнения $\sin x + 1 + \sin 5x = 2\cos^2 x$ на отрезке $[0; 90°]$.

B4. Найдите произведение целых решений неравенства $\log_{0,25} \log_4 (x^4 - 2x^3 + x^2) \ge 0$.

B5. Найдите произведение корней уравнения $(x^2-x+1)+(x^2-x+3)+(x^2-x+5)+\ldots+(x^2-x+15) = 304$.

B6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите количество точек максимума функции $y = f(x)$.



B7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 13, а высота трапеции равна 5. Найдите значение выражения $24S$, где S — площадь трапеции.

B8. Вычислите $9\sqrt{5}\operatorname{tg}\left(0{,}5\arcsin\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)$.

B9. Найдите увеличенную в 4 раза сумму корней уравнения $2x - 2 - 3\sqrt{13-3x} = \frac{3x-13}{x-1}$.

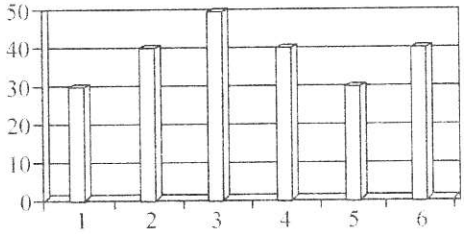
B10. Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + 3y^2$, если $x^2 + y^2 = 1$.

B11. Два автомобиля и мотоцикл движутся по трассе в одном направлении с постоянными скоростями. Когда автомобили находились в одной точке, мотоцикл отставал от них на 24 км. Когда первый автомобиль и мотоцикл поравнялись, второй автомобиль был впереди них на 6 км. Найдите расстояние в километрах между автомобилями в тот момент, когда мотоцикл и второй автомобиль находились в одной точке трассы.

B12. Найдите сумму корней уравнения $\sin\frac{\pi x}{2} = \log_2\left(|\cos\pi x| + \frac{1}{|\cos\pi x|}\right)$, принадлежащих отрезку $[-20; 20]$.

Тест 7

Часть А

А1. Какая из данных последовательностей является арифметической прогрессией?	1) –3; –5; 5; 3; 2) 0,1; 1; 10; 100; 3) 5; 8; 12; 17; 4) –8; –6; –4; –2; 5) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$.
А2. В треугольнике ABC $\angle B = 62°$, $\angle A = 48°$, CL — биссектриса угла C. Найдите величину угла BLC.	1) 83°; 2) 97°; 3) 63°; 4) 72°; 5) 64°.
А3. Результатом упрощения выражения $\frac{a^3}{a^2-4a}+\frac{16a}{a(4-a)}$ является:	1) $\frac{a+4}{a}$; 2) $\frac{a-4}{a}$; 3) $a+4$; 4) $a-4$; 5) 1.
А4. Одна из сторон треугольника равна 9, а вторая — 6. Какие значения может принимать третья сторона треугольника?	1) $5 < a < 17$; 2) $4 < a < 16$; 3) $1 < a < 13$; 4) $2 < a < 14$; 5) $3 < a < 15$.
А5. На рисунке изображена диаграмма выпуска продукции заводом за полгода.  На сколько процентов был перевыполнен план выпуска продукции, если по плану необходимо было изготовить 200 единиц за 6 месяцев?	1) 10; 2) 15; 3) 20; 4) 25; 5) 30.
А6. Вычислить $\sin 270° + \operatorname{tg} 315° - 2\sin 210° + \sqrt{3}\operatorname{tg} 120° \cdot \cos 60°$.	1) –2,5; 2) –1,5; 3) 0,5; 4) 1,5; 5) 1.
А7. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\left(\sqrt{3}\right)^{2x^2-6x-32} = 9$.	1) 3; 2) –3; 3) 6; 4) –2; 5) 1.
А8. Сумма 5-го и 9-го членов геометрической прогрессии равна 130, а частное от деления 16-го члена прогрессии на ее 14-й член равно 5. Найдите 1-й член прогрессии.	1) 5; 2) 0,2; 3) 2; 4) 1; 5) 0,5.
А9. Куб объемом 8 пересечен плоскостью, проходящей через диагонали двух смежных граней куба. Найдите площадь сечения.	1) $2\sqrt{2}$; 2) 4; 3) $2\sqrt{3}$; 4) 4,5; 5) $2\sqrt{6}$.
А10. Найдите сумму целых решений системы неравенств $\begin{cases}(2-x)(5\sqrt{2}-7)>0,\\ x^2+x-12\le 0.\end{cases}$	1) 3; 2) 6; 3) –5; 4) –9; 5) –7.
А11. Задумано некоторое натуральное число. Если из квадрата данного числа вычесть 323, то получится число, которое на 100 % больше задуманного. Найдите сумму цифр данного числа.	1) 19; 2) 17; 3) 15; 4) 13; 5) 10.
А12. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{a}} b^3 - \frac{1}{\log_{a^2} a} + a^{0,5+2\log_a 2}$ при $a = 25$, $b = \sqrt{5}$.	1) 19; 2) 22; 3) 24; 4) 28; 5) 26.
А13. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к основанию под углом 60°, а объем пирамиды равен 12. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	1) 12; 2) 20; 3) 24; 4) 48; 5) $12\sqrt{3}$.
А14. Вычислите $\frac{10\cdot 3^{18}\cdot 2^{16} - 3^{19}\cdot 2^{17}}{3^{18}\cdot 2^{17} + 6^{16}\cdot 30}$.	1) 3; 2) 0,75; 3) 0,5; 4) 3^{18}; 5) 2.

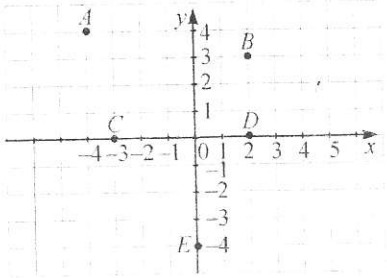
A15. Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{4}{\log_1 x+1}+\frac{8}{\log_2^2 x-1}=1$.	1) 16; 2) 32; 3) 5; 4) 0,5; 5) –5.
A16. Результатом упрощения выражения $\sqrt{\sqrt{a+\sqrt{8a}+2}-2\sqrt[4]{2a}}$ при $a\in(1;\,2)$ является:	1) $\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{a}$; 2) $\sqrt[4]{a}$; 3) $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{a}$; 5) $1-\sqrt[4]{a}$.
A17. Найдите количество корней уравнения $\sin x+\cos x=1$ на отрезке $[-2\pi;\,4\pi]$.	1) 8; 2) 7; 3) 6; 4) 5; 5) 4.
A18. Диагонали ромба относятся как 3 : 4, а его высота равна 3,6. Найдите периметр ромба.	1) 15; 2) $8\sqrt{2}$; 3) 30; 4) 12; 5) 24.

Часть B

B1. Найдите сумму корней уравнения $x\lvert 3x-18\rvert-15\lvert 6-x\rvert=6x-30$.
B2. Найдите наибольшее целое решение неравенства $2^{\frac{2-2x}{x-5}}+2^{\frac{1-x}{x-5}+1}-8\ge 0$.
B3. Найдите $13\sin 2\alpha$, если известно, что $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{2}{3}\sin\alpha+1{,}25\operatorname{tg}\alpha-\frac{5}{6}=0$.
B4. Найдите значение выражения $\left(\frac{2^{\frac{5}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}+2^{1{,}5}\cdot 5^{0{,}5}+2^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{\frac{5}{6}}}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})^2}\right)^6$.
B5. Вершины A, D и C четырехугольника $ABCD$ принадлежат окружности, а вершина B находится вне ее, причем сторона BC касается окружности в точке C. Окружность делит сторону AB на отрезки длиной 3 и 9, считая от вершины B. Найдите длину стороны BC.
B6. Найдите сумму целых решений (или решение, если оно одно) неравенства $\frac{1}{2}\log_{x+1}(x^2-2x+1)+\log_{1-x}(-x^2-6x+7)\le 3$.
B7. Две стороны треугольника равны 6 и 12, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна $\frac{\sqrt{279}}{2}$. Найдите значение выражения $4\sqrt{15}\,S$, где S — площадь треугольника.
B8. Найдите длину промежутка, являющегося множеством значений функции $y=\sqrt{6.4\sin^2 x+9.6\sin x\cos x+13.6\cos^2 x}$.
B9. Поле засевается тракторами типов А и Б. Сначала в течение двух часов работали два трактора типа А, затем в течение еще двух часов работали вместе один трактор типа А и один типа Б, в результате чего было засеяно все поле. Если бы на поле работали один трактор типа А и два трактора типа Б, то поле было бы засеяно за 4 часа. Какое количество часов необходимо одному трактору типа Б для того, чтобы засеять поле?
B10. Для всех пар чисел $(x;\,y)$, удовлетворяющих уравнению $\sqrt{x^2+2xy+y^2-4}=2x^2+7xy+6y^2-\sqrt{(2-x-y)(2+x+y)}$, найдите произведение $x\cdot y$. В ответ запишите наибольшее из этих произведений.
B11. В конус с центральным углом развертки боковой поверхности 120° и объемом $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3}$ вписана правильная четырехугольная призма так, что одно из оснований призмы лежит в плоскости основания конуса. Вершины второго основания лежат на боковой поверхности конуса, а плоскость этого основания делит высоту конуса в отношении 1 : 3, считая от вершины. Найдите значение выражения $\sqrt{2}V$, где V — объем призмы.
B12. Найдите все пары целых чисел $(x;\,y)$, удовлетворяющих уравнению $12x-3x^2-y^2+4xy+19=0$. В ответе укажите наименьшее из найденных значений y.

Тест 8

Часть А

А1. Сечением шара плоскостью является:	1) квадрат; 2) трапеция; 3) окружность; 4) круг; 5) треугольник.
А2. Сумма наименьшего составного однозначного и наименьшего простого двузначного натуральных чисел равна:	1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 14; 5) 15.
А3. Используя данные, приведенные на рисунке, выберите из следующих утверждений верное: а) точки C и D симметричны относительно оси ординат; б) координаты точки A — (4; –4); в) четырехугольник $ABDC$ — трапеция; г) площадь треугольника CED равна 10; д) треугольник ACD — остроугольный. 	1) а; 2) б; 3) в; 4) г; 5) д.
А4. Вычислить $(5,6^2 \cdot 0,2 + 5\frac{3}{5} : \frac{25}{72}) : 5,6 - 2,6$.	1) 1,4; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) 2,8; 4) 0,8; 5) 2,4.
А5. Представить выражение $\frac{a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a} : (a^{0,75})^2}$ в виде степени.	1) $a^{-1,5}$; 2) $a^{1,2}$; 3) $a^{3,5}$; 4) $a^{\frac{16}{9}}$; 5) $a^{2,5}$.
А6. Найдите значение выражения $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - 3x_1 x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - x - 5 = 0$.	1) –2,5; 2) –1,5; 3) 6,25; 4) 1,25; 5) 1.
А7. Диагонали трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD,\ AD = \frac{3}{2}BC)$ пересекаются в точке O. Найдите отношение $BO : BD$.	1) 2 : 3; 2) 2 : 5; 3) 3 : 2; 4) 5 : 2; 5) 1 : 3.
А8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{-81}}{\sqrt[3]{3}} + \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt{28 \cdot 63}$.	1) 35; 2) 40; 3) 41; 4) 43; 5) 46.
А9. Результатом упрощения выражения $(\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + 2\cos^3\alpha)\cos\alpha - \frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$ является:	1) $\sin\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\sin 2\alpha$; 4) $\sin 15^\circ$; 5) $\operatorname{tg}\alpha$.
А10. Произведение корней (или корень, если он один) уравнения $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+1} = 3^3$ равно:	1) 2; 2) 4; 3) –4; 4) –2; 5) –27.
А11. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 8$ и острым углом $\angle CBA = 60^\circ$. Найдите объем призмы, если угол между плоскостью (AB_1C) и основанием призмы равен 30°.	1) $16\sqrt{3}$; 2) 32; 3) $16\sqrt{2}$; 4) 16; 5) 36.
А12. Найдите сумму целых значений аргумента, принадлежащих области определения функции $y = \frac{\sqrt[5]{25 - x^2}}{4^{x-2} + 2^{2x-5} - 24}$.	1) 3; 2) 6; 3) –5; 4) –4; 5) –7.
А13. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\frac{x^2 + 4x + 4}{x+2} + \frac{x^2 - 8x + 16}{x-4} = 2x^2 - 7x + 2$.	1) 0,5; 2) –3,5; 3) 4,5; 4) –4,5; 5) –0,5.
А14. Найдите сумму целых решений неравенства $\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}(x^2 - 2x) \geq -2$.	1) 2; 2) 5; 3) –3; 4) 3; 5) 4.

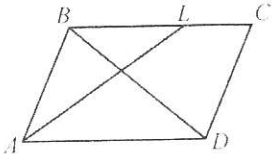
A15. Касательная к графику функции $y=-\frac{x^3}{3}+2x^2+3$ наклонена к оси Ox под углом α = arctg 4. Тогда уравнение касательной имеет вид:	1) $y=\frac{1}{4}x+1$; 2) $y=-4x$; 3) $y=4x+\frac{1}{3}$; 4) $y=4x+1$; 5) $y=4x-\frac{2}{3}$.
A16. Найдите сумму целых значений x, не являющихся решениями неравенства $\frac{1}{x^2-2x-3}\geq\frac{8}{(x^2+x)(x-3)}$.	1) 24; 2) 32; 3) 25; 4) 21; 5) 27.
A17. Найдите сумму корней уравнения $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}-1=0$, принадлежащих отрезку $[-2\pi;\ \pi]$.	1) $-\pi$; 2) $-\frac{5\pi}{4}$; 3) $-\frac{7\pi}{3}$; 4) $-\frac{7\pi}{4}$; 5) $-\frac{13\pi}{4}$.
A18. В треугольнике ABC со сторонами $AB=7$, $BC=6$, $AC=5$ проведена биссектриса AL. Найдите площадь треугольника ALC.	1) $2\sqrt{6}$; 2) $6\sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{6}$; 4) 4; 5) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

Часть B

B1. Найдите произведение корней уравнения $\lvert\lvert 3x-17\rvert+x\rvert=2x-1$.
B2. Найдите значение выражения $\left(\frac{36}{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{b}}-\frac{36}{a^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{b}}\right):\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)(ab)^{-0,5}}{2^{-0,25}}$ при $a=128$, $b=8$.
B3. $f(x)$ — нечетная функция, заданная при $x\geq 0$ формулой $f(x)=-\lvert x^2-2x\rvert$. Найдите значение выражения $f(1)+8f(-0,5)-f(-1)$.
B4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AD=14$, $CD=4$, диагональ BD является биссектрисой угла CDA, а точка пересечения диагоналей четырехугольника — точка O — делит диагональ BD на отрезки $BO=7$, $OD=8$. Найдите длину диагонали AC.
B5. Найдите в градусах значение выражения $\arccos(\sin 622^\circ)$.
B6. В основании пирамиды лежит ромб со стороной 8 и острым углом 30°. Высота пирамиды проходит через точку пересечения ее диагоналей, а боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
B7. Найдите произведение корней уравнения $\log_7\frac{x+6}{x+1}+\log_7(x^2+7x+6)=2$.
B8. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{x^2-6x}-5\sqrt[4]{x^2-6x}+6\leq 0$.
B9. Площадь боковой поверхности конуса равна 24π, а его образующая наклонена к основанию под углом $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. В конус вписан шар. Найдите значение выражения $\frac{3l}{\pi}$, где l — длина линии, по которой пересекаются боковая поверхность конуса и поверхность шара.
B10. Катер плывет от Витебска до Полоцка за 3 часа, а обратно — за 4 часа. Найдите, какое время (в ч) будет плыть плот от Витебска до Полоцка?
B11. Найдите увеличенное в 16 раз произведение корней уравнения $(x^8+x^4+1)+(3x^8+2x^4+1)+(5x^8+3x^4+1)+\ldots+(15x^8+8x^4+1)=6$.
B12. Найдите произведение всех решений неравенства $\cos\pi x+\cos 2\pi x+\cos 3\pi x\geq\sqrt{19-10\sin^2\frac{\pi x}{4}}$, на промежутке $[-3;\ 10]$.

Тест 9

Часть А

А1. Наименьшим общим знаменателем для дробей $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{12}$ является число:	1) 30; 2) 48; 3) 60; 4) 90; 5) 120.
А2. В параллелограмме $ABCD$ с тупым углом 110° проведена биссектриса AL острого угла A. Найдите величину угла ALC. 	1) 125°; 2) 130°; 3) 135°; 4) 140°; 5) 145°.
А3. Какое из данных чисел является отрицательным?	1) $\sin 372°$; 2) $\cos 275°$; 3) $125 - 5^{\pi}$; 4) $4^{-5,2}$; 5) $\log_{\sqrt{5}} 5$.
А4. Найдите сумму абсцисс точек пересечения прямой $y = \frac{x}{2} - 2$ и параболы $y = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + 2$.	1) 4; 2) 6; 3) –6; 4) 8; 5) –8.
А5. Найдите x из пропорции $\frac{0,5x}{0,19 \cdot 20 - 4\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{25}} = \frac{\frac{13}{14} + \frac{1}{7} : 2}{\left(49\frac{1}{15} - 33\frac{2}{3}\right) : 3,85}$.	1) 1; 2) 1,2; 3) 0,2; 4) 2,5; 5) 3,5.
А6. Найдите число, обратное значению выражения $\frac{0,6^5 \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}}{\left(\frac{3}{5}\right)^7 : \left(\frac{5}{3}\right)^3}$.	1) 0,6; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) 0,36; 4) $2\frac{7}{9}$; 5) 1.
А7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) с углом 60° и гипотенузой 14 проведена медиана CM. Найдите расстояние от точки M до большего катета треугольника ABC.	1) 3,5; 2) $7\sqrt{3}$; 3) $3,5\sqrt{3}$; 4) 7; 5) 4.
А8. Результатом упрощения выражения $\frac{25x^2 - 16}{5x^2 + x - 4} + \frac{2x + 3}{x + 1}$ является:	1) $\frac{2}{x+1}$; 2) $\frac{1}{5x+4}$; 3) 2; 4) 7; 5) 5.
А9. Найдите значение выражения $\log_6 150 - 2\log_6 5 + 6^{2 - \log_6 9}$.	1) 15; 2) 130; 3) 25; 4) 5; 5) 41.
А10. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Первое число в 5 раз больше третьего, а второе на 1 больше третьего. Найдите первое число.	1) 3; 2) 2,5; 3) 2; 4) 1,5; 5) 1.
А11. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной 4 и острым углом 60°. Диагональ боковой грани параллелепипеда наклонена к основанию под углом 45°. Найдите площадь его большего диагонального сечения.	1) 32; 2) 24; 3) $24\sqrt{2}$; 4) $16\sqrt{3}$; 5) $16\sqrt{2}$.
А12. Окружность задана уравнением $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 120$. Найдите расстояние от центра окружности до точки $A(10; 5)$.	1) 13; 2) 16; 3) 5; 4) 8; 5) 12.
А13. Из функций $y_1 = \sin\sqrt{x}$, $y_2 = \log_3 x$, $y_3 = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $y_4 = \pi^x$, $y_5 = x^2$ выбрать все те, областью определения которых является множество $[0; +\infty)$.	1) y_1, y_2; 2) y_2, y_3; 3) y_4, y_5; 4) y_1; 5) y_2.
А14. Две бригады, работая вместе, изготовили 240 деталей за 3 часа, причем первая бригада изготавливала на 10 деталей в час больше, чем вторая. За сколько минут может изготовить 240 деталей первая бригада, работая отдельно?	1) 320; 2) 310; 3) 280; 4) 240; 5) 210.
А15. Найдите значение производной функции $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{32}{x^2} + \pi^2$ в точке x_0, где x_0 — точка, в которой функция $g(x) = 8x - x^2 - 19$ принимает наибольшее значение.	1) $2 + 2\pi$; 2) 2; 3) $2 + \pi^2$; 4) 4; 5) 3.

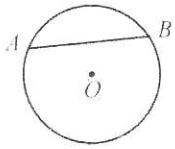
A16. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса 6, проведены к этой окружности две касательные. Найдите расстояние от точки A до центра окружности, если длина дуги окружности, заключенной между точками касания, равна 2π.	1) 12; 2) $6\sqrt{2}$; 3) $4\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $3\sqrt{2}$.
A17. Найдите сумму натуральных простых чисел, являющихся решением системы неравенств $\begin{cases} -8 \le 1 - \frac{x+2}{3} \le -3, \\ \frac{(x^2-19x+34)(x^2-11x-102)}{(x-13)(x-20)} \ge 0 \end{cases}$.	1) 34; 2) 40; 3) 17; 4) 51; 5) 64.
A18. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\log_9(x^2-6x+9) = \log_3(x+6) - \log_3(x^2+4x-12)$.	1) 3; 2) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; 3) 5; 4) –5; 5) $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Часть B

B1. Найдите количество целых решений неравенства $16 - x^2 \ge \lvert x^2 - 16 \rvert$.
B2. Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения $3\sqrt[6]{x^4-5x^2+5} + \sqrt[3]{x^4-5x^2+5} - 4 = 0$.
B3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $\frac{15}{\sqrt{\pi}}$, а длина окружности основания — $6\sqrt{5\pi}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
B4. Найдите произведение корней уравнения $x^2 + x - 6 = \frac{6}{x^2+3x-4}$.
B5. Найдите сумму чисел, принадлежащих промежутку [–17; –2] и являющихся периодами функции $y = \left(\sin\frac{\pi x}{4} - \cos\frac{\pi x}{4}\right)^2 - 4$.
B6. Найдите значение выражения $25\cos\left(4\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\operatorname{arctg}(-3)\right)$.
B7. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD,\ BC < AD)$ пересекаются в точке O под углом 60°. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $\angle CDA = 45^\circ$, а точка O удалена от стороны AD на 12. Найдите увеличенное в 10 раз отношение площади треугольника AOD к площади трапеции.
B8. Найдите сумму целых решений неравенства $0{,}25\log_4^2(4^x - 2^{x+5} + 256) + 11 \le 5\log_4(2^{x+2} - 64)$.
B9. К раствору соли массой 500 г трижды доливали различное количество воды, в результате чего концентрация соли каждый раз снижалась в 2 раза и в итоге стала равной 4 %. Найдите массу соли в растворе в граммах.
B10. Дана правильная четырехугольная усеченная пирамида со сторонами оснований 3 и 6 и боковым ребром 6. Найдите объем пирамиды, вершиной которой является одна из вершин верхнего основания, а основанием — боковая грань исходной пирамиды, не содержащая данную вершину. В ответ запишите $2\sqrt{14}$.
B11. $f(x)$ — нечетная функция, заданная при $x < 0$ формулой $g(x) = 2\sin^2\pi x - \sin\pi x - 2$. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 1$, принадлежащих отрезку [–2; 2].
B12. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{2x-2}{x-2} \le 6x - x^2 - 5$.

Тест 10

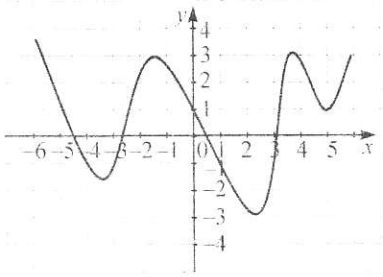
Часть А

А1. Точки A и B принадлежат окружности с центром в точке O, причем точка O не принадлежит прямой AB. Тогда отрезок AB является для данной окружности: 	1) радиусом; 2) диаметром; 3) хордой; 4) касательной; 5) диагональю.
А2. Из функций $y_1=\frac{3}{x}$, $y_2=x^2-4$, $y_3=1-\frac{x}{2}$, $y_4=2^x$, $y_5=6x-8$ линейными являются:	1) y_1, y_5; 2) y_3, y_5; 3) y_3, y_4, y_5; 4) y_2, y_3; 5) y_1, y_3, y_5.
А3. Вычислить $\left(3:3\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot 30-0{,}12:\frac{3}{250}$.	1) 37; 2) 12,5; 3) 24; 4) 31; 5) 17.
А4. Один из смежных углов в 4 раза больше другого. Найдите величину большего угла в градусах.	1) 124°; 2) 140°; 3) 135°; 4) 108°; 5) 144°.
А5. Если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и α — угол второй четверти, то $\operatorname{tg}\alpha$ равен:	1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) -1; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
А6. Результатом упрощения выражения $\left(\frac{3x}{5x+15}-\frac{6x}{5x^2-45}+\frac{x}{5x-15}\right):\frac{x}{25x+75}$ является:	1) $\frac{4}{x+5}$; 2) $\frac{4}{x-5}$; 3) 5; 4) $\frac{x}{5}$; 5) 20.
А7. Найдите значение выражения $\log_3 2\cdot\log_2 9\cdot\log_{0,5}8$.	1) –6; 2) 4; 3) –2; 4) 3; 5) –3.
А8. Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр и две наклонные. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если известно, что проекции наклонных на плоскость α равны 3 и $4\sqrt{3}$, а одна из наклонных на 3 больше другой.	1) 5; 2) $4\sqrt{3}$; 3) 6; 4) 4; 5) 3.
А9. Результатом сокращения дроби $\frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3+3\sqrt{6}}$ является:	1) $\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{6}$.
А10. Найдите значение производной функции $y=\frac{3x+2}{1-x}$ в точке $x_0=2$.	1) 3,5; 2) –2; 3) 2,5; 4) 5; 5) –5.
А11. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$ с диагональю длиной 10 и вершинами в точках $A(-2; 3)$ и $D(6; 3)$.	1) 32; 2) 16; 3) $4\sqrt{21}+8$; 4) 20; 5) 28.
А12. Если сумма первых n членов геометрической прогрессии выражается формулой $S_n=8(1-2^{-n})$, то второй член прогрессии равен:	1) 8; 2) 16; 3) 1; 4) 0,5; 5) 2.
А13. Найдите сумму целых решений неравенства $(0,(3))^{|2x-5|}\geq\frac{1}{27}$.	1) 13; 2) 10; 3) 8; 4) 15; 5) 14.
А14. Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения $x\log_{\sqrt{3}}(x^2+2x-2)=\log_3(x^2+2x-2)$.	1) –3; 2) 0,5; 3) –1,5; 4) 1; 5) 2.
А15. В треугольной пирамиде с высотой 8 и объемом 216 проведено сечение, параллельное основанию и делящее высоту пирамиды в отношении 2 : 7, считая от вершины. Найдите площадь полученного сечения.	1) 18; 2) $\frac{324}{49}$; 3) 49; 4) 4; 5) 9.
А16. Найдите сумму целых решений системы неравенств $\begin{cases}\frac{4x-x^2-4}{x+4}\geq 0,\\(x+6)(\sqrt{3}-2)(x^2+4)\leq 0.\end{cases}$	1) –10; 2) –11; 3) –9; 4) –13; 5) –15.

A17. Вычислить $\dfrac{\cos105°(\cos277°\sin172°-\cos7°\sin82°)}{(2\sqrt{2})^{-2}}$.	1) 4; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 2; 4) $\sqrt{2}$; 5) 1.
A18. Биссектриса тупого угла B трапеции $ABCD$ делит большее основание AD на отрезки $AF = 5$ и $FD = 3$ и равна этому основанию. Найдите площадь трапеции, если известно, что диагональ AC и биссектриса BF пересекаются в точке O так, что $OF = AF$.	1) 26,4; 2) 28,2; 3) 32; 4) 32,6; 5) 35,4.

Часть B

B1. Используя эскиз графика функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-6; 6]$, найдите сумму корней уравнения $f(x) = \lg0{,}1$.



B2. Наибольшее значение функции $y = -9\cos^2x - 6\sin x - 11$ равно...

B3. Из дачного поселка со скоростью 4 км/ч вышел пешеход. Через 45 минут из поселка в том же направлении выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Через сколько минут после выезда велосипедиста расстояние между ним и пешеходом будет равным 6 км?

B4. Стороны прямоугольного треугольника касаются сферы радиусом 10, а плоскость треугольника удалена от центра сферы на 6. Найдите площадь треугольника, если его периметр равен 96.

B5. Известно, что $\dfrac{2a^2-6ab+2b^2}{2a^2+ab-4b^2}=2$ и $ab<0$. Найдите значение выражения $\dfrac{4b-2a}{a+3b}$.

B6. Найдите в градусах сумму корней уравнения $\dfrac{2\sin x(\cos x+\sqrt{3}\sin x)-\sqrt{3}}{2\operatorname{tg}x+2\sqrt{3}}=0$, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$.

B7. Дан треугольник со сторонами 8, 10 и углом $\alpha = \arccos0{,}125$ между ними. На меньшей стороне треугольника, как на диаметре, построена окружность. Найдите модуль разности длин отрезков, на которые делится большая сторона точкой пересечения с данной окружностью.

B8. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{\log_3(6x^3-x^3+72x+1)}{4\log^2_{\sqrt{3}}(x-2)-2\log_3(x^2-4x+4)+4}\geq 0$.

B9. Если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x^2+|y-2x|=12, \\ 5^{x-y+5}-105\cdot5^{x-y+2}=500 \end{cases}$, то значение выражения $x_0\cdot y_0$ равно...

B10. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2-5x-30-12\sqrt{x-2}=0$.

B11. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма с объемом 96. Через середину ребра AA_1 проведено сечение призмы плоскостью, параллельной прямым AC и CB_1. Найдите объем меньшей из частей, полученных в результате деления призмы данной плоскостью.

B12. Нечетная функция $y = f(x)$ определена при всех $x \neq 0$ и при всех $x > 0$ задана формулой $g(x) = x^2 - 5x - 12$. Найдите произведение корней уравнения $f(x) = -12$.

ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 1

1. Рациональные числа и вычисления. Пропорция. Проценты. Иррациональные числа

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Номер правильного ответа	2	4	5	2	4	3	1	4	2	5	5	4	1	2	3	2	4	5	2

Номер задания	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Номер правильного ответа	3	5	2	4	1	4	3	3	4	4	1	5	1	3	4	1	5	2	3

2. Тождественные преобразования алгебраических выражений. Вычисления с использованием формул сокращенного умножения

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Номер правильного ответа	1	4	1	3	4	2	2	5	1	1	3	1	4	3	5	4	2	5	1	5	2

Номер задания	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Номер правильного ответа	1	3	5	3	2	5	3	4	3	2	1	5	2	3	5	2	2	2	5	3	1

Номер задания	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
Номер правильного ответа	2	5	5	3	4	3	4	3	1	3	5	4	5	3	1	2	3	2	3	4	5

3. Линейные уравнения, неравенства и их системы. Линейная функция

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Номер правильного ответа	5	4	5	2	3	5	1	3	2	5	5	2	5	2	1	1	5

Номер задания	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Номер правильного ответа	3	1	3	2	3	4	4	5	4	5	3	3	3	4	4	1	3

Номер задания	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Номер правильного ответа	4	1	4	5	4	5	1	3	3	2	1	4	5	2	5	2

4. Квадратные уравнения и неравенства. Теорема Виета. Квадратичная функция

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Номер правильного ответа	2	4	2	5	5	4	2	2	1	2	4	2	4	3	4	1	3

Номер задания	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Номер правильного ответа	1	3	1	4	5	2	1	2	5	4	2	1	3	1	2	4	3

Номер задания	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Номер правильного ответа	2	1	3	2	4	5	3	4	5	4	2	1	5	2	1	3

5. Рациональные уравнения и системы уравнений

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Номер правильного ответа	1	2	4	2	1	4	2	5	5	3	3	5	5	1	4	2	5	1	2

Номер задания	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Номер правильного ответа	5	1	5	5	3	2	4	1	3	1	2	3	5	4	5	3	1	2	1

Номер задания	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
Номер правильного ответа	5	4	4	1	5	2	1	3	5	4	2	4	2	3	1	5	3

6. Рациональные неравенства и их системы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Номер правильного ответа	1	4	3	2	4	2	4	4	5	4	1	2	1	1	2	1

Номер задания	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Номер правильного ответа	1	4	3	4	2	4	3	2	2	5	3	4	1	3	1	4

7. Текстовые задачи

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер правильного ответа	5	2	1	5	2	4	4	3	4	1	5	4	5	2	1	4	2	4	5	1

Номер задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Номер правильного ответа	3	4	3	1	5	5	4	2	3	2	4	4	2	5	5	1	2	2	3

8. Иррациональные уравнения и их системы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Номер правильного ответа	3	4	2	5	1	2	3	4	3	5	3	4	5	2	1	2	1

Номер задания	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Номер правильного ответа	5	4	5	1	5	3	3	1	5	1	3	2	5	2	1	1	4

Номер задания	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Номер правильного ответа	1	4	3	5	3	3	3	1	2	4	3	5	1	2	4	3	2

9. Иррациональные неравенства

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Номер правильного ответа	1	2	5	1	2	5	4	2	5	2	1	4	5	2	3	5	2	1	3	4	5	4

10. Модуль числа. Его свойства

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Номер правильного ответа	1	1	2	3	5	1	3	1	3	4	2	5

11. Уравнения с модулем

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Номер правильного ответа	1	4	1	4	5	3	2	3	2	4	4	5	1	2	2	4

Номер задания	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Номер правильного ответа	5	3	3	2	1	4	5	1	3	2	1	2	3	4	1	1

Номер задания	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Номер правильного ответа	3	5	4	5	5	2	4	1	4	5	1	2	3	4	2

12. Неравенства с модулем

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	1	5	4	1	4	5	4	3	3	1	4	3	3	2

Номер задания	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Номер правильного ответа	5	2	2	3	1	2	4	5	5	4	5	4	5

13. Прогрессии. Суммирование

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Номер правильного ответа	2	2	4	3	5	3	1	4	3	1	4	5	4	5	2	2	4	5	3

Номер задания	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Номер правильного ответа	5	5	4	2	2	3	2	2	4	2	3	3	2	5	1	5	1	4	2

14. Вычисление и преобразование тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Номер правильного ответа	1	2	4	3	2	4	2	4	4	1	2	2	2	1	5	1	2	4	1

Номер задания	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Номер правильного ответа	4	3	1	4	3	3	2	5	5	1	5	5	2	4	3	3	5	1	4

Номер задания	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
Номер правильного ответа	1	2	3	4	2	5	4	3	5	1	5	4	3	4	5	1	3	4	5

15. Обратные тригонометрические функции

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Номер правильного ответа	4	3	2	1	4	3	5	5	3	2	5	4	2

Номер задания	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Номер правильного ответа	5	4	1	2	4	3	5	3	3	4	2	2	1

16. Тригонометрические уравнения

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер правильного ответа	3	5	4	2	2	2	1	1	5	4	2	5	5	2	3

Номер задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер правильного ответа	2	4	5	3	1	1	1	2	5	3	4	2	3	5	3

Номер задания	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Номер правильного ответа	4	3	3	1	5	2	2	1	5	1	3	4	2	5	1

17. Преобразование показательных и логарифмических выражений. Свойства показательной и логарифмической функций

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер правильного ответа	4	4	1	2	1	3	2	1	3	5	2	3	3	2	5

Номер задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Номер правильного ответа	3	5	2	4	5	4	1	1	3	5	4	1	3	3

Номер задания	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
Номер правильного ответа	4	2	3	5	2	1	5	3	4	1	3	1	2	5

18. Показательные уравнения

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер правильного ответа	1	3	5	2	5	1	1	2	4	4	3	5	4	4	2

Номер задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер правильного ответа	1	3	3	2	4	3	1	4	5	3	5	5	4	2	2

19. Логарифмические уравнения

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Номер правильного ответа	4	3	1	5	4	1	1	3	2	1	2	1	4	1	3	1

Номер задания	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Номер правильного ответа	2	4	2	5	1	3	2	1	1	3	2	3	4	4	5

20. Показательные неравенства

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	4	3	4	2	2	5	1	4	4	3	1	2	3	3

Номер задания	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Номер правильного ответа	3	2	5	1	5	3	4	4	5	1	5	4	1	4

21. Логарифмические неравенства

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Номер правильного ответа	5	2	4	5	2	1	3	3	3	2	5	2	5	1	4	5

Номер задания	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Номер правильного ответа	1	5	4	2	3	4	1	3	1	2	2	5	5	3	4

22. Системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Номер правильного ответа	1	4	5	1	4	4	2	1	2	1	4	3	3	1	5	2

23. Свойства функций, их графики. Задачи в координатах. Диаграммы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Номер правильного ответа	5	3	4	1	2	3	5	1	3	1	3	4	4	4	2	2	1	2	3

Номер задания	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Номер правильного ответа	4	5	4	3	1	4	3	2	3	4	2	4	1	4	3	2	2	3	4

Номер задания	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
Номер правильного ответа	2	5	5	5	5	1	5	3	1	2	3	1	4	5	3	2	2	5

24. Производная. Применение производной

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Номер правильного ответа	3	3	1	1	4	5	2	5	1	1	2	4	4	3	2	4	1	5	3

Номер задания	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Номер правильного ответа	2	2	1	4	5	1	2	4	5	2	3	3	4	1	1	2	2	1	2

25. Планиметрия

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Номер правильного ответа	5	3	5	4	1	3	3	2	5	2	1	3	5	4	4	2	3	5	3	3	5	4	5

Номер задания	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Номер правильного ответа	2	2	1	1	4	1	5	2	4	2	4	5	2	4	2	4	3	3	4	5	1	4	4

Номер задания	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
Номер правильного ответа	1	2	3	2	4	2	1	4	5	5	1	3	2	1	4	5	2	4	3	2	1	2	3

Номер задания	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
Номер правильного ответа	2	2	4	4	2	5	1	5	5	3	5	1	3	3	4	2	2	4	4	2

26. Стереометрия

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер правильного ответа	2	4	5	3	3	4	1	2	4	3	2	3	2	1	5	4	5	3	4	1

Номер задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Номер правильного ответа	3	4	3	1	5	4	3	5	2	4	2	5	1	2	1	3	2	2	5	2

Номер задания	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Номер правильного ответа	4	2	3	4	1	1	5	3	5	1	2	4	3	4	3	2	5	1	4	1

Номер задания	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
Номер правильного ответа	5	4	3	1	1	3	2	3	2	3	4	2	3	1	5	2	1	3	4

Номер задания	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
Номер правильного ответа	2	3	1	4	2	4	4	5	4	2	3	5	1	4	2	3	5	3	4

ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 2

Тест 1

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	3	2	5	3	1	2	1	5	5	4	4	1	5	2	5	3	4	2

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	4	24	540	25	64	–7	27	86	–16	6	9	6

Тест 2

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	4	3	1	5	5	2	1	3	5	2	3	2	4	4	1	5	3	5

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	14	10	32	25	–15	28	30	27	–12	24	240	–9

Тест 3

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	4	2	1	2	3	5	3	3	3	1	1	4	4	1	3	2	5	4

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	–1	3	1	8192	8	5	12	20	96	64	4824	8

Тест 4

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	4	1	4	3	4	1	2	5	2	1	3	4	2	4	1	2	5	4

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	20	5	105	405	5	175	4	35	–4	27	–12	15

Тест 5

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	5	1	2	4	4	3	5	1	3	2	5	2	1	2	3	4	2	3

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	112	32	3	8	17	27	42	–3	12	–15	18	27

Тест 6

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	1	5	5	4	2	3	3	2	1	3	4	4	2	1	5	5	3	3

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	22	28	35	–2	–30	2	845	15	21	3	8	–10

Тест 7

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	4	1	3	5	2	1	1	2	3	4	5	5	3	2	2	4	2	1

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	17	4	12	10	6	–3	405	2	20	8	12	–38

Тест 8

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	4	5	4	1	5	3	2	3	2	4	2	4	1	5	3	1	5	5

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	36	–2	4	18	172	64	–13	12	8	24	–4	240

Тест 9

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	3	5	3	2	2	1	1	4	4	2	4	1	4	1	2	3	4	5

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	9	4	180	18	–40	–7	18	11	160	189	2	8

Тест 10

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Номер правильного ответа	3	2	1	5	2	5	1	4	3	4	5	5	2	1	4	3	3	1

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Правильный ответ	–3	–4	90	384	–7	630	3	64	9	11	20	–40

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Готовимся к централизованному тестированию. Математика / УО «Республиканский институт контроля знаний» Министерства образования РБ. Мн., 2009.
2. Действующие учебники по математике для средней школы.
3. *Азаров, А. И.* Математика. Текстовые задачи. Школьный курс / А. И. Азаров, С. А. Барвенов, В. С. Федосенко. Мн., 2005.
4. *Азаров, А. И.* Методы решения алгебраических уравнений, неравенств и систем / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. Мн., 2004.
5. *Азаров, А. И.* Методы решения планиметрических задач / А. И. Азаров, В. В. Казаков, Ю. Д. Чурбанов. Мн., 2005.
6. *Азаров, А. И.* Методы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств, систем / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. Мн., 2005.
7. *Азаров, А. И.* Серия «Тематический тренажер» / А. И. Азаров. Мн., 2008.
8. *Азаров, А. И.* Функциональный и графический методы решения экзаменационных задач / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. Мн., 2004.
9. *Генденштейн, Л. Э.* Математика. Наглядный справочник с примерами / Л. Э. Генденштейн, А. П. Ершова, А. С. Ершова. М., 2005.
10. *Лисова, М. И.* Планиметрия. Итоговое повторение / М. И. Лисова, О. Н. Пирютко. Мн., 2004.
11. *Мерзляк, А. Г.* Алгебраический тренажер / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. М., 2003.
12. Методы решения тригонометрических задач / А. И. Азаров [и др.]. Мн., 2005.
13. Централизованное тестирование. Математика: Сборник тестов / УО «Республиканский институт контроля знаний» Министерства образования РБ. Мн., 2005—2009.